LỜI NÓI ĐẦU

Trong chương trình đổi mới nội dung Sách giáo khoa, số phức được đưa vào chương trình toán học phổ thông và được giảng dạy ở cuối lớp 12. Ta biết sự ra đời của số phức là do nhu cầu mở rộng tập hợp số, số phức là cầu nối hoàn hảo giữa các phân môn Đại số, Lượng giác, Hình học và Giải tích (thể hiện sâu sắc mối quan hệ đó là công thức $e^{i\pi}+1=0$). Số phức là vấn đề hoàn toàn mới và khó đối với học sinh, đòi hỏi người dạy phải có tầm nhìn sâu, rộng về nó. Do những tính chất đặc biệt của số phức nên khi giảng dạy nội dung này giáo viên có nhiều hướng khai thác, phát triển bài toán để tạo nên sự lôi cuốn, hấp dẫn người học. Bằng việc kết hợp các tính chất của số phức với một số kiến thức đơn giản khác về lượng giác, giải tích, đại số và hình học giáo viên có thể xây dựng được khá nhiều dạng toán với nội dung hấp dẫn và hoàn toàn mới mẻ.

Vì mới đưa vào chương trình SGK nên có rất ít tài liệu về số phức để học sinh và giáo viên tham khảo. Bên cạnh đó, lượng bài tập cũng như các dạng bài tập về số phức trong SGK còn nhiều hạn chế. Giúp học sinh có cái nhìn sâu, rộng hơn về số phức, trong quá trình giảng dạy tôi luôn tìm tòi khai thác và kết hợp các kiến thức khác về toán học để xây dựng các dạng bài tập mới cho học sinh tư duy, giải quyết. Một trong các vấn đề tôi xây dựng là dạng toán **"Ứng dụng số phức để tính tổng của các C_n^k"** trên cơ sở khai thác tính chất của số phức và vận dụng khai triển nhị thức Newton.

Để nội dung của sáng kiến kinh nghiệm này có tính thực tiễn trong công tác giảng dạy chung của nhà trường, rất mong được sự đóng góp ý kiến xây dựng và bổ xung của các đồng chí trong tổ chuyên môn và các đồng nghiệp khác.

Vĩnh Yên, ngày 20 tháng 5 năm 2009

Người thực hiện

Lê Hồng Thái

NỘI DUNG CỦA ĐỀ TÀI

I- MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ LÝ THUYẾT:

1- Khai triển nhị thức Newton:

Với mọi x và với mọi $n \in N^*$ ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \ldots + x^{n-1}C_n^{n-1} + x^nC_n^n$$

2- Các tính chất của số phức dùng trong đề tài:

* Hai số phức z = x + iy, w = x' + iy' bằng nhau khi và chỉ khi x = x' và y = y'

* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

* Giải phương trình: $x^3 - 1 = 0$

Ta được các nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Các nghiệm đó chính là các căn bậc ba của 1.

Đăt: $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và ε có các tính chất sau:

1) $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$

2) $\varepsilon^3 = 1$

3) $\varepsilon^{3k} = 1$

4) $\varepsilon^{3k+1} = \varepsilon$

5) $\varepsilon^{3k+2} = \varepsilon^2$

(k – nguyên).

3- Khi nào thì dùng số phức để tính tổng của các C_n^k ?

Đây là vấn đề lớn nhất cần chú ý cho học sinh. Ta dùng số phức để tính tổng của các C_n^k khi tổng này có hai đặc điểm:

* Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau .

* k luôn lẻ, hoặc luôn chẵn hoặc khi chia k cho một số ta luôn được cùng một số dư (trong chương trình phổ thông ta chỉ cho HS làm với k = 3l, k = 3l + 1, k = 3l + 2).

4- Các tổng của C_n^k được tính như thế nào ?

***** Khai triển $(1 + x)^n$, cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp (thường ta chọn là x = i). So sánh phần thực và phần ảo của cùng một số phức trong hai cách tính.

***** Khai triển trực tiếp các số phức (thường chỉ xét các số phức có argument là $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}$). Sau đó so sánh phần thực và phần ảo của cùng một số phức trong hai cách tính.

***** Khai triển $(1 + x)^n$, đạo hàm hai vế theo x sau đó cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp (thường ta chọn là x = i). Sau đó so sánh phần thực và phần ảo của cùng một số phức trong hai cách tính.

***** Khai triển $(1 + x)^n$, cho x nhận giá trị là các căn bậc ba của đơn vị. Cộng vế theo vế các đẳng thức thu được. Suy ra giá trị của tổng cần tìm.

Điều quan trọng là phải quan sát tổng cần tìm có những đặc điểm gì để lựa chọn một trong các cách trên. Chủ yếu là căn cứ vào hệ số của các C_n^k trong tổng. Để nói chi tiết được điều này đòi hỏi phải có lượng lớn những nhận xét, sẽ vượt quá khuôn khổ cho phép của một đề tài sáng kiến kinh nghiệm. Tôi chỉ đưa ra một số ví dụ minh hoạ cho từng dạng, qua đó người đọc sẽ tự trả lời được câu hỏi: Để tính tổng này ta phải làm gì?

<u>II- MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HOẠ:</u>

<u>Dạng 1:Khai triển $(1 + x)^n$, cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp hoặc khai triển trực tiếp các số phức</u>

<u>Ví dụ 1:</u>

Tính tổng $A = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - C_{2009}^6 + \ldots + C_{2009}^{2004} - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008}$

$B = -C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + C_{2009}^7 - \ldots - C_{2009}^{2005} + C_{2009}^{2007} - C_{2009}^{2009}$

Giải:

Xét khai triển:

$$(1+x)^{2009} = C_{2009}^0 + xC_{2009}^1 + x^2C_{2009}^2 + ... + x^{2008}C_{2009}^{2008} + x^{2009}C_{2009}^{2009}$$

Cho x = - i ta có:

$$(1-i)^{2009} = C_{2009}^0 + iC_{2009}^1 + i^2C_{2009}^2 + ... + i^{2008}C_{2009}^{2008} + i^{2009}C_{2009}^{2009}$$

$$= (C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - C_{2009}^6 + ... + C_{2009}^{2004} - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008}) +$$

$$+ (-C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + C_{2009}^7 - ... - C_{2009}^{2005} + C_{2009}^{2007} - C_{2009}^{2009})i$$

Mặt khác:

$$(1-i)^{2009} = (\sqrt{2})^{2009}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2009} = (\sqrt{2})^{2009}\left(\cos\frac{2009\pi}{4} - i\sin\frac{2009\pi}{4}\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{2009}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^{2009}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{1004} - 2^{1004}i$$

So sánh phần thực và phần ảo của $(1 - i)^{2009}$ trong hai cách tính trên ta được:

$$A = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - C_{2009}^6 + ... + C_{2009}^{2004} - C_{2009}^{2006} + C_{2009}^{2008} = 2^{1004}$$

$$B = -C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + C_{2009}^7 - ... - C_{2009}^{2005} + C_{2009}^{2007} - C_{2009}^{2009} = -2^{1004}$$

Ví dụ 2:

Tính tổng: $\mathbf{C = \dfrac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - ... - 3^{23}C_{50}^{46} + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50}\right)}$

Giải:

Xét khai triển:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50} = \frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^0 - (i\sqrt{3})C_{50}^1 + (i\sqrt{3})^2C_{50}^2 + ... - (i\sqrt{3})^{49}C_{50}^{49} + (i\sqrt{3})^{50}C_{50}^{50}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^0 - (\sqrt{3})^2C_{50}^2 + (\sqrt{3})^4C_{50}^4 - ... - (\sqrt{3})^{46}C_{50}^{46} + (\sqrt{3})^{48}C_{50}^{48} - (\sqrt{3})^{50}C_{50}^{50}\right) +$$

$$+\ \frac{1}{2^{50}}\left(-\sqrt{3}C_{50}^{1}+(\sqrt{3})^{3}C_{50}^{3}-(\sqrt{3})^{5}C_{50}^{5}+...+(\sqrt{3})^{47}C_{50}^{47}-(\sqrt{3})^{49}C_{50}^{49}\right)i$$

Mặt khác: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{50}=\cos\left(\frac{100\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{100\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

So sánh phần thực của $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}$ trong hai cách tính trên ta được:

$$C=\frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^{0}-3C_{50}^{2}+3^{2}C_{50}^{4}-...-3^{23}C_{50}^{46}+3^{24}C_{50}^{48}-3^{25}C_{50}^{50}\right)=-\frac{1}{2}$$

<u>Ví dụ 3:</u>

Tính tổng: D = $3^{10}C_{20}^{0}-3^{9}C_{20}^{2}+3^{8}C_{20}^{4}-3^{7}C_{20}^{6}+...+3^{2}C_{20}^{16}-3C_{20}^{18}+C_{20}^{20}$

<u>Giải:</u>

Xét khai triển:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}=(\sqrt{3})^{20}C_{20}^{0}+i(\sqrt{3})^{19}C_{20}^{1}-(\sqrt{3})^{18}C_{20}^{2}-...-(\sqrt{3})^{2}C_{20}^{18}-i\sqrt{3}C_{20}^{19}+C_{20}^{20}=$$

$$=(3^{10}C_{20}^{0}-3^{9}C_{20}^{2}+3^{8}C_{20}^{4}-3^{7}C_{20}^{6}+...+3^{2}C_{20}^{16}-3C_{20}^{18}+C_{20}^{20})\ +$$

$$+\ \left((\sqrt{3})^{19}C_{20}^{1}-(\sqrt{3})^{17}C_{20}^{3}+...+(\sqrt{3})^{3}C_{20}^{17}-\sqrt{3}C_{20}^{19}\right)i$$

Mặt khác:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}=2^{20}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{20}=2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{20}=2^{20}\left(\cos\frac{20\pi}{6}+i\sin\frac{20\pi}{6}\right)=$$

$$=2^{20}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2^{20}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2^{19}-2^{19}\sqrt{3}i$$

So sánh phần thực của $\left(\sqrt{3}+i\right)^{20}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$D=3^{10}C_{20}^{0}-3^{9}C_{20}^{2}+3^{8}C_{20}^{4}-3^{7}C_{20}^{6}+...+3^{2}C_{20}^{16}-3C_{20}^{18}+C_{20}^{20}=-2^{19}$$

Dạng 2: Khai triển $(1 + x)^n$, đạo hàm hai vế theo x sau đó cho x nhận giá trị là những số phức thích hợp

Ví dụ 1:

Tính tổng: $\mathbf{D = C_{30}^1 - 3C_{30}^3 + 5C_{30}^5 - 7C_{30}^7 + ... + 25C_{30}^{25} - 27C_{30}^{27} + 29C_{30}^{29}}$

$\mathbf{E = 2C_{30}^2 - 4C_{30}^4 + 6C_{30}^6 - 8C_{30}^8 + ... + 26C_{30}^{26} - 28C_{30}^{28} + 30C_{30}^{30}}$

Giải:

$(1 + x)^{30} = C_{30}^0 + xC_{30}^1 + x^2C_{30}^2 + x^3C_{30}^3 + ... + x^{28}C_{30}^{28} + x^{29}C_{30}^{29} + x^{30}C_{30}^{30}$

Đạo hàm hai vế ta có:

$30(1 + x)^{29} = C_{30}^1 + 2xC_{30}^2 + 3x^2C_{30}^3 + ... + 28x^{27}C_{30}^{28} + 29x^{28}C_{30}^{29} + 30x^{29}C_{30}^{30}$

Cho x = i ta có:

$$30(1 + i)^{29} = (C_{30}^1 - 3C_{30}^3 + 5C_{30}^5 - 7C_{30}^7 + ... + 25C_{30}^{25} - 27C_{30}^{27} + 29C_{30}^{29}) +$$

$$+ (2C_{30}^2 - 4C_{30}^4 + 6C_{30}^6 - 8C_{30}^8 + ... + 26C_{30}^{26} - 28C_{30}^{28} + 30C_{30}^{30})i$$

Mặt khác:

$$30(1 + i)^{29} = 30\left(\sqrt{2}\right)^{29}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{29} = 30\left(\sqrt{2}\right)^{29}\left(\cos\frac{29\pi}{4} + i\sin\frac{29\pi}{4}\right) =$$

$$= 30\left(\sqrt{2}\right)^{29}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -15.2^{15} - 15.2^{15}i$$

So sánh phần thực và ảo của $30(1 + i)^{29}$ trong hai cách tính trên ta có:

$D = C_{30}^1 - 3C_{30}^3 + 5C_{30}^5 - 7C_{30}^7 + ... + 25C_{30}^{25} - 27C_{30}^{27} + 29C_{30}^{29} = - 15.2^{15}$

$E = 2C_{30}^2 - 4C_{30}^4 + 6C_{30}^6 - 8C_{30}^8 + ... + 26C_{30}^{26} - 28C_{30}^{28} + 30C_{30}^{30} = - 15.2^{15}$

Ví dụ 2:

Tính tổng S = $\mathbf{2.3C_{20}^2 - 4.3^2C_{20}^4 + 6.3^3C_{20}^6 - ... + 18.3^9C_{20}^{18} - 20.3^{10}C_{20}^{20}}$

Giải:

Xét khai triển:

$(1 + \sqrt{3}x)^{20} =$

$= C_{20}^0 + (\sqrt{3}x)C_{20}^1 + (\sqrt{3}x)^2 C_{20}^2 + (\sqrt{3}x)^3 C_{20}^3 + ... + (\sqrt{3}x)^{19} C_{20}^{19} + (\sqrt{3}x)^{20} C_{20}^{20}$

Đạo hàm hai vế ta có:

$20\sqrt{3}(1+\sqrt{3}x)^{19} =$

$= \sqrt{3}C_{20}^1 + 2.3xC_{20}^2 + 3.(\sqrt{3})^3 x^2 C_{20}^3 + ... + 19.(\sqrt{3})^{19} x^{18} C_{20}^{19} + 20.3^{10} x^{19} C_{20}^{20}$

Cho x = i ta có: $20\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)^{19} =$

$$= \left(\sqrt{3}C_{20}^1 - 3.(\sqrt{3})^3 C_{20}^3 + 5.(\sqrt{3})^5 C_{20}^5 - ... + 17.(\sqrt{3})^{17} C_{20}^{17} - 19.(\sqrt{3})^{19} C_{20}^{19}\right) +$$

$$+ \left(2.3C_{20}^2 - 4.3^2 C_{20}^4 + 6.3^3 C_{20}^6 - ... + 18.3^9 C_{20}^{18} - 20.3^{10} C_{20}^{20}\right)i.$$

Mặt khác: $20\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)^{19} = 20\sqrt{3}.2^{19}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{19} = 20.\sqrt{3}.2^{19}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{19} =$

$$= 20.\sqrt{3}.2^{19}\left(\cos\frac{19\pi}{3} + i\sin\frac{19\pi}{3}\right) = 20.\sqrt{3}.2^{19}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 10.\sqrt{3}.2^{19} + 30.2^{19}i$$

So sánh phần ảo của $20\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)^{19}$ trong hai cách tính trên ta có:

$S = 2.3C_{20}^2 - 4.3^2 C_{20}^4 + 6.3^3 C_{20}^6 - ... + 18.3^9 C_{20}^{18} - 20.3^{10} C_{20}^{20} = 30.2^{19}$

Ví dụ 3:

Tính các tổng sau: $\mathbf{M = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + ... + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14}}$

$\mathbf{N = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + ... + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15}}$

Giải:

Xét khai triển:

$(1 + x)^{15} = C_{15}^0 + xC_{15}^1 + x^2C_{15}^2 + x^3C_{15}^3 + ... + x^{13}C_{15}^{13} + x^{14}C_{15}^{14} + x^{15}C_{15}^{15}$

Nhân hai vế với x ta có:

$x(1 + x)^{15} = xC_{15}^0 + x^2C_{15}^1 + x^3C_{15}^2 + x^4C_{15}^3 + ... + x^{14}C_{15}^{13} + x^{15}C_{15}^{14} + x^{16}C_{15}^{15}$

Đạo hàm hai vế ta có:

$(1 + x)^{15} + 15x(1 + x)^{14} =$

$= C_{15}^0 + 2xC_{15}^1 + 3x^2C_{15}^2 + 4x^3C_{15}^3 + ... + 14x^{13}C_{15}^{13} + 15x^{14}C_{15}^{14} + 16x^{15}C_{15}^{15}$

Với x = i ta có: $(1 + i)^{15} + 15i(1 + i)^{14} =$

$$= \left(C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + ... + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14}\right) +$$

$$+ \left(2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + ... + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15}\right)i$$

Mặt khác:

$$(1 + i)^{15} + 15i(1 + i)^{14} = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{15} + 15i.\left(\sqrt{2}\right)^{14}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{14} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) + 15.2^7 i\left(\cos\frac{14\pi}{4} + i\sin\frac{14\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 15.2^7 =$$

$$= -2^7 - 2^7 i + 15.2^7 = 14.2^7 - 2^7 i = 7.2^8 - 2^7 i$$

So sánh phần thực và ảo của $(1 + i)^{15} + 15i(1 + i)^{14}$ trong hai cách tính trên ta có:

$M = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + ... + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14} = 7.2^8$

$N = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + ... + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15} = -2^7$

Dạng 3: Khai triển $(1 + x)^n$, cho x nhận giá trị là các căn bậc ba của đơn vị

Để tiện cho việc theo dõi sự biến đổi và các phép tính tôi đưa lại các vấn đề về căn bậc ba của đơn vị (đã trình bày trong phần I của đề tài):

Giải phương trình: $x^3 - 1 = 0$

Ta được các nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Các nghiệm đó chính là các căn bậc ba của 1.

Đăt: $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và ε có các tính chất sau:

1) $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$

2) $\varepsilon^3 = 1$

3) $\varepsilon^{3k} = 1$

4) $\varepsilon^{3k+1} = \varepsilon$

5) $\varepsilon^{3k+2} = \varepsilon^2$

(k – nguyên).

Sử dụng các tính chất trên của ε ta có thể tính được các tổng sau:

<u>Ví dụ 1:</u>

Tính tổng: S = $\mathbf{C_{20}^0 + C_{20}^3 + C_{20}^6 + ... + C_{20}^{3k} + ... + C_{20}^{15} + C_{20}^{18}}$

<u>Giải:</u>

Xét khai triển:

$(1 + x)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + x^3C_{20}^3 + ... + x^{18}C_{20}^{18} + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Cho x = 1 ta có:

$2^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + ... + C_{20}^{18} + C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x = \varepsilon$ ta có:

$(1 + \varepsilon)^{20} = C_{20}^0 + \varepsilon C_{20}^1 + \varepsilon^2C_{20}^2 + C_{20}^3 + ... + C_{20}^{18} + \varepsilon C_{20}^{19} + \varepsilon^2C_{20}^{20}$ (2)

Cho $x = \varepsilon^2$ ta có:

$(1 + \varepsilon^2)^{20} = C_{20}^0 + \varepsilon^2C_{20}^1 + \varepsilon C_{20}^2 + C_{20}^3 + ... + C_{20}^{18} + \varepsilon^2C_{20}^{19} + \varepsilon C_{20}^{20}$ (3)

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3) ta được:

$2^{20} + (1+\varepsilon)^{20} + (1+\varepsilon^2)^{20} = 3S$.

Mặt khác: $(1+\varepsilon)^{20} = (-\varepsilon^2)^{20} = \varepsilon^{40} = \varepsilon$; $(1+\varepsilon^2)^{20} = (-\varepsilon)^{20} = \varepsilon^{20} = \varepsilon^2$

Do vậy: $3S = 2^{20} - 1$. Hay $S = \dfrac{2^{20}-1}{3}$

Ví dụ 2:

Tính tổng $T = C_{20}^1 + C_{20}^4 + C_{20}^7 + ... + C_{20}^{3k+1} + ... + C_{20}^{16} + C_{20}^{19}$

Giải:

Xét khai triển:

$(1+x)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + x^3C_{20}^3 + ... + x^{18}C_{20}^{18} + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Nhân hai vế với x^2 ta có:

$x^2(1+x)^{20} = x^2C_{20}^0 + x^3C_{20}^1 + x^4C_{20}^2 + x^5C_{20}^3 + ... + x^{20}C_{20}^{18} + x^{21}C_{20}^{19} + x^{22}C_{20}^{20}$

Cho x = 1 ta có:

$2^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + ... + C_{20}^{18} + C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x = \varepsilon$ ta có:

$\varepsilon^2(1+\varepsilon)^{20} = \varepsilon^2 C_{20}^0 + C_{20}^1 + \varepsilon C_{20}^2 + \varepsilon^2 C_{20}^3 + C_{20}^4 ... + \varepsilon^2 C_{20}^{18} + C_{20}^{19} + \varepsilon C_{20}^{20}$ (2)

Cho $x = \varepsilon^2$ ta có:

$\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{20} = \varepsilon C_{20}^0 + C_{20}^1 + \varepsilon^2 C_{20}^2 + \varepsilon C_{20}^3 + ... + \varepsilon C_{20}^{18} + C_{20}^{19} + \varepsilon^2 C_{20}^{20}$ (3)

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3) ta có:

$2^{20} + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^{20} + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^{20} = 3T$

Mặt khác: $\varepsilon^2(1+\varepsilon)^{20} = \varepsilon^{42} = 1$; $\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{20} = \varepsilon^{21} = 1$

Do vậy: $3T = 2^{20} + 2$. Hay: $T = \dfrac{2^{20}+2}{3}$

Ví dụ 3:

Tính tổng: P = $\mathbf{C_{20}^0 + 3C_{20}^3 + 6C_{20}^6 + ... + 3kC_{20}^{3k} + ... + 15C_{20}^{15} + 18C_{20}^{18}}$

Giải:

Xét khai triển:

$(1 + x)^{20} = C_{20}^0 + xC_{20}^1 + x^2C_{20}^2 + x^3C_{20}^3 + ... + x^{18}C_{20}^{18} + x^{19}C_{20}^{19} + x^{20}C_{20}^{20}$

Đạo hàm hai vế ta có:

$20(1 + x)^{19} = C_{20}^1 + 2xC_{20}^2 + 3x^2C_{20}^3 + ... + 18x^{17}C_{20}^{18} + 19x^{18}C_{20}^{19} + 20x^{19}C_{20}^{20}$ (*)

Nhân hai vế (*) với x ta có:

$20x(1 + x)^{19} = xC_{20}^1 + 2x^2C_{20}^2 + 3x^3C_{20}^3 + ... + 18x^{18}C_{20}^{18} + 19x^{19}C_{20}^{19} + 20x^{20}C_{20}^{20}$

Cho x = 1 ta được:

$20.2^{19} = C_{20}^1 + 2C_{20}^2 + 3C_{20}^3 + 4C_{20}^4 + ... + 18C_{20}^{18} + 19C_{20}^{19} + 20C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x = \varepsilon$ ta có:

$20\varepsilon(1 + \varepsilon)^{19} = \varepsilon C_{20}^1 + 2\varepsilon^2C_{20}^2 + 3C_{20}^3 + 4\varepsilon C_{20}^4 ... + 18C_{20}^{18} + 19\varepsilon C_{20}^{19} + 20\varepsilon^2C_{20}^{20}$ (2)

Cho $x = \varepsilon^2$ ta có:

$20\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)^{19} = \varepsilon^2C_{20}^1 + 2\varepsilon C_{20}^2 + 3C_{20}^3 + 4\varepsilon^2C_{20}^4 ... + 18C_{20}^{18} + 19\varepsilon^2C_{20}^{19} + 20\varepsilon C_{20}^{20}$ (3)

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta có:

$20[2^{19} + \varepsilon(1 + \varepsilon)^{19} + \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)^{19}] = 3P - C_{20}^0$

Mặt khác: $\varepsilon(1 + \varepsilon)^{19} = \varepsilon(-\varepsilon^2)^{19} = -\varepsilon^{39} = -1$

$\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)^{19} = \varepsilon^2(-\varepsilon)^{19} = -\varepsilon^{21} = -1$

Vậy $3P = 1 + 20(2^{19} - 2) = 10.2^{20} - 39$. Suy ra $P = \frac{10.2^{20}}{3} - 13$

III- MỘT SỐ BÀI TẬP:

1- Tính các tổng sau:

$$A_1 = \sqrt{3}C_{30}^1 - 3(\sqrt{3})^3 C_{30}^3 + 5(\sqrt{3})^5 C_{30}^5 - ... - 27(\sqrt{3})^{27} C_{30}^{27} + 29(\sqrt{3})^{29} C_{30}^{29}$$

$$A_2 = 2.3C_{30}^2 - 4.3^2 C_{30}^4 + 6.3^3 C_{30}^6 - ... - 28.3^{14} C_{30}^{28} + 30.3^{15} C_{30}^{30}$$

Hướng dẫn: Xét khai triển: $(1+\sqrt{3}x)^{30}$. Đạo hàm hai vế, cho x = i và so sánh phần thực, phần ảo của hai số phức.

ĐS: $A_1 = 15\sqrt{3}.2^{29}$; $A_2 = -45.2^{29}$

2- Tính các tổng sau:

$$B_1 = C_{25}^0 + 2C_{25}^2 - 3.4C_{25}^4 + 5.6C_{25}^6 - 7.8C_{25}^8 + ... + 21.22C_{25}^{22} - 23.24C_{25}^{24}$$

$$B_2 = C_{25}^1 + 2.3C_{25}^3 - 4.5C_{25}^5 + 6.7C_{25}^7 - 8.9C_{25}^9 + ... + 22.23C_{25}^{23} - 24.25C_{25}^{25}$$

Hướng dẫn: Xét khai triển: $(1 + x)^{25}$. Đạo hàm hai vế hai lần, sau đó cho x = i. So sánh phần thực và phần ảo của hai số phức bằng nhau.

ĐS: $B_1 = 75.2^{14} - 1$; $B_2 = -25(1 + 3.2^{14})$

3- Tính các tổng sau:

$$C_1 = C_{20}^0 - 3C_{20}^2 + 5C_{20}^4 - 7C_{20}^6 + ... + 17C_{20}^{16} - 19C_{20}^{18} + 21C_{20}^{20}$$

$$C_2 = 2C_{20}^1 - 4C_{20}^3 + 6C_{20}^5 - 8C_{20}^7 + ... - 16C_{20}^{15} + 18C_{20}^{17} - 20C_{20}^{19}$$

Hướng dẫn: Xét khai triển: $(1 + x)^{20}$. Nhân hai vế với x. Đạo hàm hai vế. Cho x = i.

ĐS: $C_1 = -11.2^{10}$; $C_2 = -10.2^{10}$

4- Tính các tổng sau:

$$D_1 = 1^2 C_{100}^1 - 3^2 C_{100}^3 + 5^2 C_{100}^5 - 7^2 C_{100}^7 + ... + 95^2 C_{100}^{95} - 97^2 C_{100}^{97} + 99^2 C_{100}^{99}$$

$$D_2 = 2^2 C_{100}^2 - 4^2 C_{100}^4 + 6^2 C_{100}^6 - 8^2 C_{100}^8 + ... + 96^2 C_{100}^{96} - 98^2 C_{100}^{98} + 100^2 C_{100}^{100}$$

Hướng dẫn: Xét khai triển: $(1 + x)^{100}$. Đạo hàm hai vế. Nhân hai vế với x. Lại đạo hàm hai vế. Cho x = i. *ĐS:* $D_1 = -50.100.2^{50}$; $D_2 = -50.2^{50}$.

5- Tính tổng sau:

$E = 2C_{25}^{2} + 5C_{25}^{5} + 8C_{25}^{8} + ... + 20C_{25}^{20} + 23C_{25}^{23}$

Hướng dẫn: Xét khai triển của $(1 + x)^{25}$. Đạo hàm hai vế. Sau đó nhân hai vế với x^2. Cho x lần lượt bằng 1, ε, ε^2 (ba căn bậc ba của 1) cộng vế theo vế ba đẳng thức nhận được ta tìm được E.

ĐS: $E = \dfrac{25(2^{24} - 1)}{3}$

6 – Tính các tổng sau:

$F_1 = C_{40}^{1} + 4^2C_{40}^{4} + 7^2C_{40}^{7} + 10^2C_{40}^{10} + ... + 37^2C_{40}^{37} + 40^2C_{40}^{40}$

$F_2 = 2^2C_{40}^{2} + 5^2C_{40}^{5} + 8^2C_{40}^{8} + 11^2C_{40}^{11} + ... + 35^2C_{40}^{35} + 38^2C_{40}^{38}$

$F_3 = C_{40}^{0} + 3^2C_{40}^{3} + 6^2C_{40}^{6} + 9^2C_{40}^{9} + ... + 36^2C_{40}^{36} + 39^2C_{40}^{39}$

Hướng dẫn: Xét khai triển của $(1+ x)^{40}$. Đạo hàm hai vế. Nhân hai vế với x. Lại đạo hàm hai vế.

Để có F_1 ta cho x lần lượt là 1, ε, ε^2 (ba căn bậc ba của 1). Cộng vế theo vế ba đẳng thức nhận được.

Làm thế nào để có F_2, F_3 mong độc giả cùng tìm tòi một chút !

ĐS: $F_1 = \dfrac{40.41(2^{38} - 1)}{3}$

$F_2 = \dfrac{40(2^{39} + 1) + 39.40(2^{38} - 1)}{3}$

$F_3 = \dfrac{40(2^{39} + 1) + 39.40(2^{38} + 2) - 1}{3}$

7- Tính các tổng sau:

$$G_1 = C_{40}^0 + 4C_{40}^3 + 7C_{40}^6 + 10C_{40}^9 + ... + 34C_{40}^{33} + 37C_{40}^{36} + 40C_{40}^{39}$$

$$G_2 = 2C_{40}^1 + 5C_{40}^4 + 8C_{40}^7 + 11C_{40}^{10} + ... + 35C_{40}^{34} + 38C_{40}^{37} + 41C_{40}^{40}$$

$$G_3 = 3C_{40}^2 + 6C_{40}^5 + 9C_{40}^8 + 12C_{40}^{11} + ... + 36C_{40}^{35} + 39C_{40}^{38}$$

Hướng dẫn: Khai triển $(1 + x)^{40}$. Nhân hai vế với x. Đạo hàm hai vế.

Để có G_1 ta cho x lần lượt là 1, ε, ε^2 (ba căn bậc ba của 1). Cộng vế theo vế ba đẳng thức nhận được.

Làm thế nào để có G_2, G_3 mong độc giả cùng tìm tòi một chút !

ĐS: $G_1 = 7.2^{40} + 13$; $G_2 = 7.2^{40} – 27$; $G_3 = 7.2^{40} + 28$.