TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, GTLN – GTNN NHỜ DỰ ĐOÁN DẤU BẰNG

1. Bất đẳng thức Côsi

a. Bất đẳng thức Côsi cho 2 số:

Cho 2 số $a, b \geq 0$. Khi đó $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

b. Bất đẳng thức Côsi cho 3 số:

Cho 3 số $a, b, c \geq 0$. Khi đó $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Nhận dạng:

- Tìm GTNN của tổng khi biết tích.
- Tìm GTLN của tích khi biết tổng.
- Chứng minh tổng lớn hơn tích, tích chia tổng (tổng bình phương,...).
- Dùng nhập các tổng, tổng nghịch đảo,... thành một.

Các BĐT cơ bản liên quan hay dùng:

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Dấu "=" xảy ra khi a = b.
2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.
3. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq ab + bc + ca$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.
4. Với a, b > 0. Ta có: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$. Dấu "=' xảy ra khi a = b $\left(\text{hay}: \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}\right)$.
5. Với a, b, c > 0. Ta có: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c $\left(\text{hay}: \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}\right)$.

Ý nghĩa của các BĐT 4, 5 là cho phép ta nhập các phân số thành một do đó rất thuận lợi cho việc xét hàm với một ẩn.

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki-BĐT trị tuyệt đối

Trong chương trình thi đại học chúng ta chỉ được áp dụng BĐT Côsi 2 hoặc 3 số không âm và BĐT Bunhiacopxki cho 2 cặp số.

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)}$$

Dấu "=' xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ (Nếu bỏ | | thì cần thêm ≥ 0 nữa).

Nhận dạng:

- Tổng các cặp số có tích không đổi.
- Tổng bình phương bằng một số không đổi.

Ứng dụng:

- Nhập các tổng bình phương thành một.

3. Khảo sát hàm số

Khi tìm GTLN, GTNN các em thường mắc phải sai lầm phổ biến trong việc tìm giá trị của biến tại các điểm đạt GTLN, GTNN đó là: thực hiện liên tiếp nhiều bước đánh giá nhưng dấu "=" tại mỗi bước là không như nhau do đó không có dấu "=' để xảy ra đẳng thức cuối cùng. Xét bài toán:

Tìm GTLN của $f(x) = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x$, *có bạn giải như sau:*

Chỉ cần xét $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có: $\sin^5 x \leq \sin x$ suy ra: $f(x) \leq \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Mặt khác: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$.

Vậy maxf(x) = 2.

<u>Nhận xét:</u> Bài giải trên không đúng, do đã sai lầm trong tìm dấu "='. f(x) không thể đạt giá trị bằng 2 được vì để tới BĐT cuối chúng ta đã thực hiện 2 phép biến:

- Lần 1: $\sin^5 x \leq \sin x$; dấu "=" khi $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

- Lần 2: $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 2;$ dấu "=" khi $x=\frac{\pi}{6}$.

Như vậy, khi thực hiện mỗi bước biến đổi ta thường tự đặt ra câu hỏi:

- Khi thực hiện các bước biến đổi như vậy thì liệu dấu "=" có đạt được ở bước cuối cùng không?

- Đánh giá như thế nào để có thể đưa về vế còn lại được hay không?

Mặc dù bài toán có thể thực hiện liên tiếp nhiều bước biến đổi nhưng để dấu "=" đạt được thì ở mỗi bước dấu "=" cũng phải giống như dấu "=" ở đẳng thức cuối cùng. *Vậy thì tại sao ta không dự đoán trước dấu "=" của BĐT (hoặc giá trị mà tại đó biểu thức đạt max, min) rồi từ đó mới định hướng phương pháp đánh giá?*. Đây là một cách phân tích tìm lời giải mà tôi muốn giới thiệu. Để có hướng suy nghĩ đúng chúng ta thực hiện các bước phân tích sau:

I. Phân tích – Tìm lời giải:

1. Dự đoán dấu "=" của BĐT hay các điểm mà tại đó đạt GTLN, GTNN.
2. Từ dự đoán dấu "=", kết hợp với các BĐT quen thuộc, dự đoán phép đánh giá. Mỗi phép đánh giá phải đảm bảo nguyên tắc dấu "=" xảy ra ở mỗi bước này phải giống như dấu "=" dự đoán phải đầu.

Để làm rõ, tôi xin phân tích cách suy nghĩ tìm lời giải trong một vài ví dụ sau:

II. Các ví dụ:

<u>Ví dụ 1.</u> (ĐH 2003-A). Cho x, y, z > 0 thoả mãn: $x+y+z\le 1$. CMR:

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

<u>Phân tích:</u>

B1. Dự đoán dấu "=": $x=y=z=\frac{1}{3}$.

B2. Để làm mất dấu căn, ta có thể suy nghĩ theo 2 hướng: mất dấu căn ở từng số hạng hoặc nhập dấu căn ở mỗi số hạng thành một.

1. Nếu suy nghĩ theo hướng mất dấu căn ở từng số hạng ta dùng BĐT Bunhiacopxki:

- $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$ ở dạng tổng hai bình phương $\to$ BĐT BCS $\to$ ta cần tìm: $\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left([?]+[?]\right)}\ge\ldots$ Dấu "=" của dự đoán ban đầu là $x=\frac{1}{3}$ và dấu "=" của đánh giá BĐT BCS là: $\frac{\frac{1}{x}}{x}=\frac{?}{?}$. Như vậy 2 số còn lại cần điền sẽ có tỉ lệ $3:\frac{1}{3}=9:1$. Ta tìm được: $\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+9^2\right)}\ge x+\frac{9}{x}$. Tương tự với y, z và cộng lại, ta được: $P.\sqrt{82}\ge\frac{9}{x}+\frac{9}{y}+\frac{9}{z}+x+y+z.$
- Vế phải là tổng các phân số quen (BĐT Côsi)

$\to\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$. (Dấu "=" vẫn đảm bảo) $\to\sqrt{82}P\ge x+y+z+\frac{81}{x+y+z}=f(t)=t+\frac{81}{t}$ (với t = x + y + z $(0<t\le 1)$). Khảo sát hàm ta được đpcm. (Tới đây có em dùng BĐT Côsi $t+\frac{81}{t}\ge 18$ không thu được kết quả vì đã vi phạm nguyên tắc dấu "=").

2. Nếu suy nghĩ theo hướng nhập các dấu căn:

- Ở mỗi dấu căn là dạng bình phương $\to$ tổng 3 độ dài của 3 véctơ.
- Dự đoán dấu "=" khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Khi đó vécto $\vec{u}=\left(x;\frac{1}{x}\right),\vec{v}=\left(y;\frac{1}{y}\right),\vec{w}=\left(z;\frac{1}{z}\right)$ cùng hướng được, tức đẳng thức sau xảy ra được: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|=\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$.
- Tới đây thực hiện các bước phân tích như 1.

Khi thay dữ liệu $x+y+z\le 1$ bằng dữ liệu khác, chẳng hạn: $x+y+z\le 2$ thì vế phải bài toán như thế nào?

Ví dụ 2. (DBĐH – 2003). Tìm GTLN, GTNN của: $P=\sin^5 x+\sqrt{3}\cos x$.

Phân tích: Ta thấy P chứa một ẩn x, suy nghĩ đầu tiên của ta thường là dùng đạo hàm. Thử đạo hàm: $f'(x)=5\sin^4 x\cos x-\sqrt{3}\sin x$.

- Chúng ta thấy có một nghiệm là sinx = 0 nhưng các nghiệm còn lại ta không thể tìm được. Như vậy hướng giải quyết khi đạo hàm trực tiếp là không khả thi. Nhưng qua đây cho ta ***dự đoán được các điểm mà tại đó đạt GTLN, GTNN*** sẽ là các điểm làm sinx = 0 (thường thì các điểm đạt max, min là các điểm tới hạn của hàm số).
- Từ điều này, khi ta biến đổi và sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá phải luôn luôn có dấu "=" tại các điểm làm sinx = 0.
- Muốn đưa về một ẩn t, ta đặt t = cosx, nhưng $\sin^5 x$ không chuyển về t được $\rightarrow$ đánh giá $\sin^5 x$ để hạ một bậc ($\sin^2 x,\sin^4 x,\ldots$ thì đưa về t = cosx được). ***Phải đánh giá như thế nào để dấu "=" có được khi*** sinx = 0 $\rightarrow$ $\sin^5 x\le\sin^4 x\rightarrow$ Khi đó: $\sin^4 x=\left(1-t^2\right)^2$.

$f(x)\le g(t)=\left(1-t^2\right)^2+\sqrt{3}t,\ t\in[-1;1]$.

- $g'(t)=\sqrt{3}-4t\left(1-t^2\right)\rightarrow$ hàm bậc 3 nhưng không nhẩm được nghiệm được (thử bấm máy xem có nghiệm trong [-1; 1] $\rightarrow$ không có nghiệm $\rightarrow$ g'(t) chỉ mang dấu, đánh giá g'(t) để chứng minh g'(t) có một dấu $\rightarrow$ dùng BĐT hoặc đạo hàm.
- $g''(t)=12t^2-4,\ g''(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}$. Lập BBT hoặc để ý rằng $g'(\pm 1),\ g'\left(\pm\frac{1}{2}\right)>0\ \Rightarrow$

$g'(t)>0,\forall t\in[-1;1]$. Suy ra: maxg(t) = g(1) (***vẫn đảm bảo dấu "=" như ở trên***).

Ví dụ 3. (ĐH 2004-A). Cho tam giác không tù ABC, thoả mãn điều kiện: $\cos 2A+2\sqrt{2}\cos B+2\sqrt{2}\cos C=3$. Tính các góc của tam giác.

Phân tích:

Bài toán yêu cầu tính 3 góc trong khi đó thì cho một đẳng thức ràng buộc như vậy chỉ có cách dùng BĐT để đánh giá một vế lớn hơn hoặc bằng vế còn lại.

- Dự đoán dấu "=": $B=C=45^0$ và $A=90^0$. (B, C đối xứng nên dự đoán B = C, hệ số cosB là $2\sqrt{2}$, từ đây dự đoán B = 45^0, thử vào thấy thoả).
- Ta thực hiện biến đổi quen thuộc: $\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, với dự đoán B = C thì $\cos\frac{B-C}{2}=1$, ta có thể đánh giá cosB + cosC để chuyển về một ẩn: $\cos B+\cos C=2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}\le 2\sin\frac{A}{2}$.
- Vậy: $\cos 2A+4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}-3\ge 0$.

Đây là bài toán một ẩn ta có thể:

H1: Đặt $t=\sin\frac{A}{2},\left(t\in\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)$ chuyển

$f(t)=\left[2\left(2t^2-1\right)^2-1\right]+4\sqrt{2}t-1=8t^4-8t^2+4\sqrt{2}t-1$

$f'(t)=32t^3-16t+4\sqrt{2}\rightarrow$ không giải được nghiệm, (bấm máy tìm nghiệm $t\in\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ thấy không có nghiệm $\rightarrow$ f'(t) chỉ có một dấu $\rightarrow$ f''(t) lập BBT suy ra được $f'(t)\ge 0,\forall t\Rightarrow f(t)\le f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3$.

H2: Đánh giá cos2A để giảm bớt bậc, có thể phân tích theo hướng: $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$. Với dự đoán dấu "=" khi $A = 90^0$ ở trên, ta có thể đánh giá $\cos^2 A$ như thế nào? Đánh giá: $\cos^2 A \le \cos A$ (để đảm bảo dấu "=" xảy ra khi $A = 90^0$).

- Thu được: $\cos A + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 3 \ge 0$ hay: $-2\sin^2\frac{A}{2} + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 4 \ge 0$.

Suy ra: $-\left(\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 2\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to$

Ví dụ 4. (ĐH Mỏ Địa Chất – 99). Giả sử A, B, C là 3 góc của một tam giác. Tìm GTNN:

$$P = \frac{1}{2+\cos 2A} + \frac{1}{2+\cos 2B} + \frac{1}{2-\cos 2C}.$$

Phân tích:

- Dự đoán điểm đạt GTNN: thử một số giá trị đặc biệt và dự đoán A = B (A, B đối xứng)

A, B	15^0	30^0	45^0	60^0
P	$\frac{4}{4+\sqrt{3}} + \frac{2}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{26}{15}$

Với dự đoán $A = B = 30^0, C = 120^0$.

- Với giá trị dự đoán ta để ý:

$2 + \cos 2A = 2 + \cos 2B = 2 - \cos 2C$, và cần đánh giá $\ge$. Điều này trùng với cách nhập các phân số trong BĐT Côsi:

- Vậy: $P \ge \frac{9}{6 + \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C} = Q.$
- Mục tiêu bây giờ là đi chứng minh:

$R = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \le \frac{3}{2}$ (giá trị tại điểm dự đoán, chiều $\le$ để đảm bảo $Q \ge \frac{6}{5}$)

- Biểu thức của R chứa tổng quen thuộc của tam giác:

$\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A-B).\cos(A+B) = -2\cos(A-B)\cos C$ và $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$.

Vậy $R = -2\cos(A-B).\cos C - 2\cos^2 C + 1$.

- Tới đây, có 2 suy nghĩ:

H1: Khi $A = B = 30^0$ xảy ra thì $\cos(A-B) = 1$ và $\cos C = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos(A-B)$. Tỉ lệ này giống tỉ lệ phân tích thành bình phương trong biểu thức của R. Ta thử phân tích:

$R = -2\left(\cos C + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right)^2 + 1 + \frac{1}{2}\cos^2(A-B) \le \frac{3}{2}$. Đây là mục tiêu cần đi tới.

H2: Đánh giá R đưa về một ẩn. Theo dự đoán thì cos(A – B) = 1 xảy ra được. Vậy ta có đánh giá quen thuộc: $\cos(A-B) \le 1$. Nếu nhân cosC vào 2 vế ta gặp sai lầm vì chưa biết dấu cosC. Ta tránh bằng cách: $-\cos(A-B).\cos C \le |\cos(A-B)\cos C| \le |\cos C|$ (dấu "=" đạt được tại các điểm dự đoán).

Vậy: $R \le -2\cos^2 C + 2|\cos C| + 1 = -\left(|\cos C| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}$ (hoặc xét hàm).

Ví dụ 5. (ĐHSP Hà Nội – 99). Cho $x, y, z \in [0;1]$. Chứng minh rằng:

$$2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \le 3.$$

Phân tích:

- Dự đoán dấu "=": hai số bằng 1 còn 1 số bằng 0 hoặc x = y = z = 1.
- Với dự đoán trên làm thế nào để xuất hiện được vế trái ? Để làm xuất hiện x^2y ta thử xét tích:

$(1-x^2)(1-y) \ge 0$ (***đảm bảo dấu "=" như dự đoán***) hay: $x^2y + 1 - x^2 - y \ge 0$. Thực hiện tương tự như trên ta có:

$$y^2z + 1 - y^2 - z \ge 0, \quad z^2x + 1 - z^2 - x \ge 0.$$

- Nếu cộng 3 vế ta gần được BĐT cần chứng minh, chỉ thay $2\left(x^3+y^3+z^3\right)$ bằng tổng: $x^2+y^2+z^2+x+y+z.$ Với giả thiết $x,y,z\in[0;1]$ thì ta có thể so sánh các luỹ thừa với bậc khác nhau, do đó có thể so sánh hai tổng trên: $x^3\le x^2\le x;\ y^3\le y^2\le y;\ z^3\le z^2\le z.$ Cộng các BĐT ta được đích cần tới.

Ví dụ 6. (ĐH – A – 2005). Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Phân tích:

- Dự đoán dấu "=": $x=y=z=\frac{3}{4}.$
- Với dự đoán đó thì 2x = y + z, x + z = 2y, x + y = 2z; mỗi phân số ở vế phải bây giờ giống vế phải của BĐT nhập phân số quen thuộc ở thức thứ 4 của chiêu "Côsi".
- Đánh giá:

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right);\ \frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{x+z}\right);\ \frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{x+y}\right).$$

- Với dự đoán x = y = z ta có thể đánh giá: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\dots$ cộng các BĐT này ta được đpcm.

Ví dụ 7. Cho x, y, z > 0 thoả mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+x^3+z^3}}{xz}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\ge 3\sqrt{3}.$$

Phân tích:

- Dự đoán dấu "=": x = y = z = 1.
- Với dự đoán này thì $1=x^3=y^3,$ ở mỗi phân số ta thấy đều có dạng tổng chia tích, ta dùng Côsi để đánh giá đưa về tích:

$$\sqrt{1+x^3+y^3}\ge\sqrt{3\sqrt[3]{x^3y^3}}=\sqrt{3xy}\Rightarrow\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge\frac{\sqrt{3xy}}{xy}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}};$$

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}};\quad\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}.$$

Suy ra: $VT\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}.$

- Kết hợp với giả thiết và với dự đoán dấu "=" thì $\sqrt{xy}=\sqrt{yz}=\sqrt{zx}.$ Điều này trùng với dấu hiệu của BĐT Côsi, do đó dùng BĐT Côsi ta được:

$$VT\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}}=3\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{xyz}}=3\sqrt{3}.$$

Qua các ví dụ trên chúng ta thấy được tầm quan trọng của việc đánh giá, dự đoán dấu "=" xảy ra ở các BĐT. Ngoài việc tránh cho ta những sai lầm thường gặp trong quá trình tìm GTLN, GTNN thì việc dự đoán dấu "=" còn cho chúng ta định hướng được phương pháp chứng minh (các cách đánh giá là hoàn toàn tự nhiên chứ không phải 'từ trên trời rơi xuống'). Xin mời các em vận dụng vào các bài tập sau:

III. Bài tập đề nghị:

1. Tính các góc của tam giác ABC biết rằng:

   a. $\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B=\frac{9}{4}+3\cos C+\cos^2 C$

   b. $\cos A+\cos B-\cos C=-\frac{7}{2}+2\sin\frac{C}{2}+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$

2. Tìm GTNN của $P = 3\sin x + 8\cos^7 x$.
3. Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng: $3x + 2y + 4z \geq \sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 5\sqrt{zx}$.
4. Cho a, b, c > 0 thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh: $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
5. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh: $\left(1+\frac{1}{\cos A}\right)\left(1+\frac{1}{\cos B}\right)\left(1+\frac{1}{\cos C}\right) \geq 27$.
6. Cho 3 số x, y, z > 0 sao cho xy + yz + zx = xyz. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{2x^2+y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{2y^2+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{2z^2+x^2}}{zx} \geq \sqrt{3}.$$
7. (ĐH – A – 2005). Cho x, y, z > 0 thoả mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$
8. (ĐH – D – 2005). Cho x, y, z > 0 thoả xyz = 1. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+x^3+z^3}}{xz} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq 3\sqrt{3}.$$