

Chuyên đề 5:

BẤT ĐẲNG THỨC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Số thực dương, số thực âm:

- Nếu x là số thực dương, ta ký hiệu $x > 0$
- Nếu x là số thực âm, ta ký hiệu $x < 0$
- Nếu x là số thực dương hoặc $x = 0$, ta nói x là số thực không âm, ký hiệu $x \geq 0$
- Nếu x là số thực âm hoặc $x = 0$, ta nói x là số thực không dương, ký hiệu $x \leq 0$

Chú ý:

- Phủ định của mệnh đề " $a > 0$ " là mệnh đề " $a \leq 0$ "
- Phủ định của mệnh đề " $a < 0$ " là mệnh đề " $a \geq 0$ "

II. Khái niệm bất đẳng thức:

1. Định nghĩa 1: Số thực a gọi là lớn hơn số thực b , ký hiệu $a > b$ nếu $a - b$ là một số dương, tức là $a - b > 0$. Khi đó ta cũng ký hiệu $b < a$

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

- Nếu $a > b$ hoặc $a = b$, ta viết $a \geq b$. Ta có:
 $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$

2. Định nghĩa 2:

Giả sử A, B là hai biểu thức bằng số

Mệnh đề : " A lớn hơn B ", ký hiệu : $A > B$

" A nhỏ hơn B ", ký hiệu : $A < B$

" A lớn hơn hay bằng B " ký hiệu $A \geq B$

" A nhỏ hơn hay bằng B " ký hiệu $A \leq B$

được gọi là một bất đẳng thức

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

III. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức :

1. Tính chất 1:
$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$$

2. Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả 1: $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$

Hệ quả 2: $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$

3. Tính chất 3:
$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

4. Tính chất 4:
$$a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

Hệ quả 3: $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

Hệ quả 4:
$$a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

5. **Tính chất 5:**
$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

6. **Tính chất 6:**
$$a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

7. **Tính chất 7:**
$$a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$$

8. **Tính chất 8:**
$$a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

Hệ quả 5: Nếu a và b là hai số dương thì :

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

Nếu a và b là hai số không âm thì :

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$$

IV. Bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối :

1. **Định nghĩa:**
$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

2. **Tính chất :** $|x| \geq 0$, $|x|^2 = x^2$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

3. Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \leq |a| + |b|$
- $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$

V. Bất đẳng thức trong tam giác :

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- $a > 0, b > 0, c > 0$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

VI. Các bất đẳng thức cơ bản :

a. Bất đẳng thức Cauchy:

Cho hai số không âm a; b ta có :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b

Cho ba số không âm a; b; c ta có :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b=c

Tổng quát :

Cho n số không âm a_1, a_2, \dots, a_n ta có :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Các phương pháp cơ bản chứng minh bất đẳng thức :

Ta thường sử dụng các phương pháp sau

1. Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết rằng đúng .

Ví dụ:

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi số thực a,b,c
2. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ với mọi a,b

2. Phương pháp 2: Phương pháp tổng hợp

Xuất phát từ các bất đẳng thức đúng đã biết dùng suy luận toán học để suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1: a) Cho hai số dương a và b thỏa mãn $3a + 2b = 1$. Chứng minh: $ab \leq \frac{1}{24}$

b) Cho hai số dương a và b thỏa mãn $ab = 1$. Chứng minh: $4a + 9b \geq 12$

Ví dụ 2: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{x} + \frac{1}{4x} \geq 5$

Ví dụ 3: Cho x,y,z là các số dương. Chứng minh rằng: $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right) \geq 8$

Ví dụ 4: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geq 9$

Ví dụ 5: Cho a,b,c > 0 và abc=1. Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TÌM GTLN & GTNN CỦA MỘT HÀM SỐ

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = (x+2)(3-x)$ với $-2 \leq x \leq 3$

Ví dụ 2: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P = (x+1)(y+1)(z+1)$

Ví dụ 3: Tìm GTNN của các hàm số

a) $y = |x+5| + |x-3|$

b) $y = |x+1| + |x-2| + |2x-5|$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10x^2 + 5y^2 - 10xy - 10x + 14$ với $x, y \in \mathbb{R}$

-----Hết-----

TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

ĐỀ SỐ 1:

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \frac{1}{x^2}, x > 0$ là

- (A) 3 (B) 1 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt[3]{3}$

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{1}{x^3}, x > 0$ là

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) 1 (C) 4 (D) $3\sqrt[3]{4}$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{5}{x-2}, x > 2$ là

- (A) $\sqrt{2} + 1$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $5 - 2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{5} + 2$

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{x+3}{x+1}, x > -1$ là

- (A) $2\sqrt{2} + 5$ (B) $2\sqrt{2} - 5$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $-2\sqrt{2}$

Câu 5: Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4 - 5x^2 - 2y^2 + 2xy + 8x + 2y$ với $x, y \in \mathbb{R}$ là

- (A) -9 (B) $\frac{1}{9}$ (C) $-\frac{1}{9}$ (D) 9

-----Hết-----