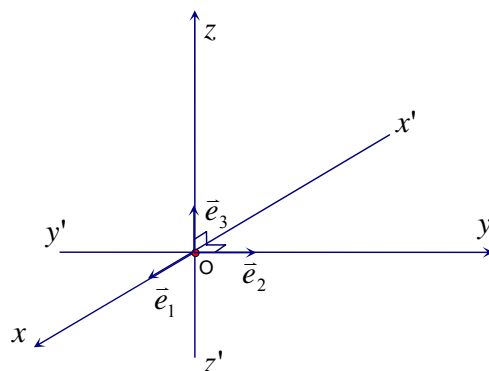


## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

### PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN TOẠ ĐỘ ĐIỂM - TOẠ ĐỘ VÉC TƠ

#### I. Hệ trục toạ độ ĐỀ-CÁC trong không gian

- $x'Ox$  : trục hoành
- $y'Oy$  : trục tung
- $z'Oz$  : trục cao
- $O$  : gốc toạ độ
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  : véc tơ đơn vị



**Quy ước :** Không gian mà trong đó có chọn hệ trục toạ độ Đề-Các vuông góc Oxyz được gọi là không gian Oxyz và ký hiệu là :  $kg(Oxyz)$

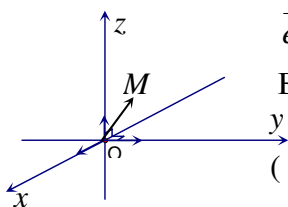
#### II. Toạ độ của một điểm và của một véc tơ:

**1. Định nghĩa 1:** Cho  $M \in kg(Oxyz)$ . Khi đó véc tơ  $\vec{OM}$  được biểu diễn một cách duy nhất theo  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  bởi hệ thức có dạng :  $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$  với  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Bộ số  $(x; y; z)$  trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của điểm M.

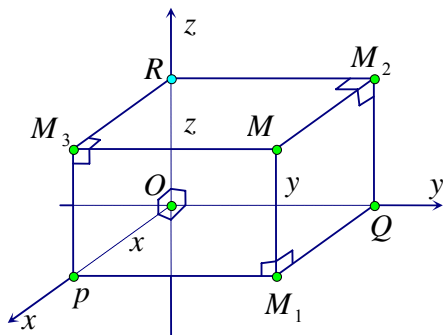
Ký hiệu:  $M(x; y; z)$

( x : hoành độ của điểm M; y : tung độ của điểm M, z : cao độ của điểm M )



$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

- **Ý nghĩa hình học:**



$$x = \overline{OP} \quad ; \quad y = \overline{OQ} \quad ; \quad z = \overline{OR}$$

**2. Định nghĩa 2:** Cho  $\vec{a} \in \text{kg}(Oxyz)$ . Khi đó véc tơ  $\vec{a}$  được biểu diễn một cách duy nhất theo  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  bởi hệ thức có dạng:  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$  với  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .  
 Bộ số  $(a_1; a_2; a_3)$  trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của véc tơ  $\vec{a}$ .  
**Ký hiệu:**  $\vec{a} = (a_1; a_2)$

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

## II. Các công thức và định lý về toạ độ điểm và toạ độ véc tơ:

**Định lý 1:** Nếu  $A(x_A; y_A; z_A)$  và  $B(x_B; y_B; z_B)$  thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

**Định lý 2:** Nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  thì

$$\begin{aligned} * \quad \vec{a} = \vec{b} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \\ * \quad \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3) \\ * \quad \vec{a} - \vec{b} &= (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3) \\ * \quad k.\vec{a} &= (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

## III. Sự cùng phương của hai véc tơ:

### Nhắc lại

- Hai véc tơ cùng phương là hai véc tơ nằm trên cùng một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.
- Định lý về sự cùng phương của hai véc tơ:**

**Định lý 3:** Cho hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  với  $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \exists ! k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \vec{a} = k.\vec{b}$$

Nếu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  thì số  $k$  trong trường hợp này được xác định như sau:

$k > 0$  khi  $\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{b}$

$k < 0$  khi  $\vec{a}$  ngược hướng  $\vec{b}$

$$|k| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

**Định lý 4:**  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\overrightarrow{AC}$

☞ **Định lý 5:** Cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  ta có :

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

#### IV. Tích vô hướng của hai véc tơ:

**Nhắc lại:**

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2 \\ \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

☞ **Định lý 6:** Cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  ta có :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

☞ **Định lý 7:** Cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  ta có :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

☞ **Định lý 8:** Nếu  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  thì

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

☞ **Định lý 9:** Cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  ta có :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

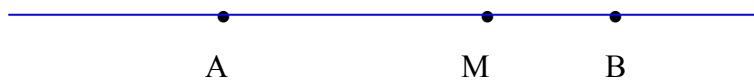
☞ **Định lý 10:** Cho hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  ta có :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

#### V. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số k:

**Định nghĩa :** Điểm M được gọi là chia đoạn AB theo tỷ số k ( k ≠ 1 ) nếu như :

$$\vec{MA} = k \cdot \vec{MB}$$



👉 **Định lý 11** : Nếu  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  và  $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$  ( $k \neq 1$ ) thì

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A - k.x_B}{1-k} \\ y_M = \frac{y_A - k.y_B}{1-k} \\ z_M = \frac{z_A - k.z_B}{1-k} \end{cases}$$

**Đặc biệt** : M là trung điểm của AB  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

## BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

**Bài 1:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho ba điểm A(3;1;0), B(-1;2;-1), C(2;-1;3)

Tìm điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành

**Bài 2:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho ba điểm A(2;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0)

- Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC
- Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ A

## VI. Tích có hướng của hai véc tơ:

**1. Định nghĩa:** Tích có hướng của hai véc tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  là một véc tơ được

ký hiệu :  $[\vec{a}; \vec{b}]$  có tọa độ là :

$$[\vec{a}; \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

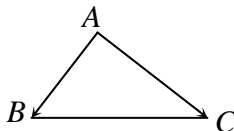
**Cách nhớ:**

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \vec{a} & = & (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} & = & (b_1; b_2; b_3) \end{matrix}$$

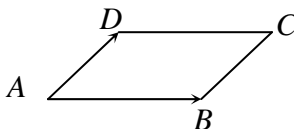
### 2. Tính chất:

- $[\vec{a}; \vec{b}] \perp \vec{a}$  và  $[\vec{a}; \vec{b}] \perp \vec{b}$

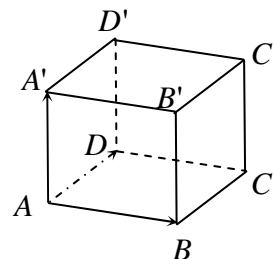
- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|$



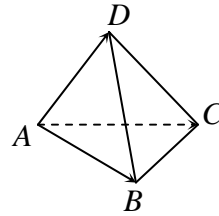
- $S_{\square ABCD} = |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}]|$



- $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$



- $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$
- $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}; \vec{b}] = \vec{0}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$



### **BÀI TẬP ỨNG DỤNG:**

**Bài 1:** Cho bốn điểm A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1), D(1;1;1)

- Chứng minh rằng bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng
- Tính diện tích tam giác ABC
- Tính thể tích tứ diện ABCD

**Bài 2:** Tính thể tích tứ diện ABCD biết A(-1;-2;0), B(2;-6;3), C(3;-3;-1), D(-1;-5;3)

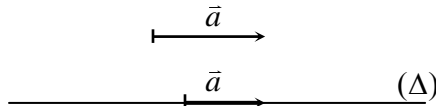
## **ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN**

### **I. Các định nghĩa:**

#### **1. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng:**

##### **1. VTCP của đường thẳng :**

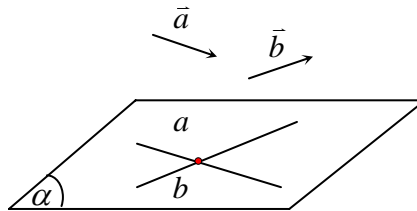
$\vec{a}$  là VTCP của đường thẳng  $(\Delta)$   $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \text{ có giá song song hoặc trùng với } (\Delta) \end{cases}$



#### **Chú ý:**

- Một đường thẳng có vô số VTCP, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một đường thẳng  $(\Delta)$  hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một VTCP của nó.

#### **2. Cặp VTCP của mặt phẳng:**



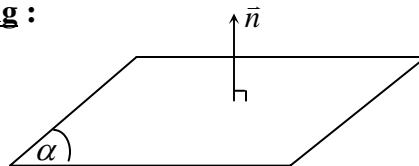
Cho mặt phẳng  $\alpha$  xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau  $a$  và  $b$ . Gọi  $\vec{a}$  là VTCP của đường thẳng  $a$  và  $\vec{b}$  là VTCP của đường thẳng  $b$ . Khi đó :

Cặp  $(\vec{a}, \vec{b})$  được gọi là cặp VTCP của mặt phẳng  $\alpha$

#### **Chú ý :**

- Một mặt phẳng  $\alpha$  hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp VTCP của nó.

### 3. Véc tơ pháp tuyến ( VTPT) của mặt phẳng :



$$\vec{n} \text{ là VTPT của mặt phẳng } \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ có giá vuông góc với mp } \alpha \end{cases}$$

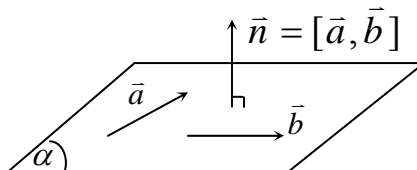
**Chú ý:**

- Một mặt phẳng có vô số VTPT, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp VTPT của nó.

### 4. Cách tìm tọa độ một VTPT của mặt phẳng khi biết cặp VTCP của nó:

**Định lý:** Giả sử mặt phẳng  $\alpha$  có cặp VTCP là :  $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$  thì mp  $\alpha$  có một VTPT là :

$$\vec{n} = [\vec{a}; \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$



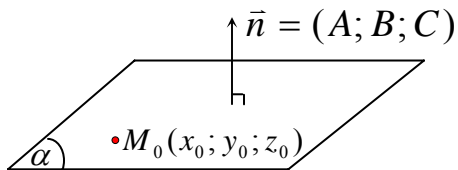
### BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

Tìm một VTPT của mặt phẳng  $\alpha$  biết  $\alpha$  đi qua ba điểm A(-2;0;1), B(0;10;3), C(2;0;-1)

### II. Phương trình của mặt phẳng :

**Định lý 1:** Trong Kg(Oxyz) . Phương trình mặt phẳng  $\alpha$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có một

VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$  là:

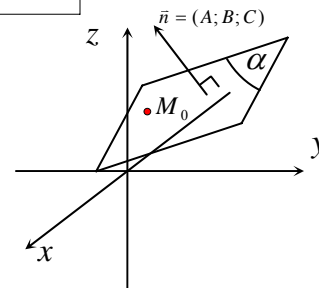


$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

**Định lý 2:** Trong Kg(Oxyz) . Phương trình dạng :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

là phương trình tổng quát của một mặt phẳng .



### Chú ý :

- Nếu  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$  thì  $(\alpha)$  có một VTPT là  $\vec{n} = (A; B; C)$
- $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

### Các trường hợp đặc biệt:

#### 1. Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

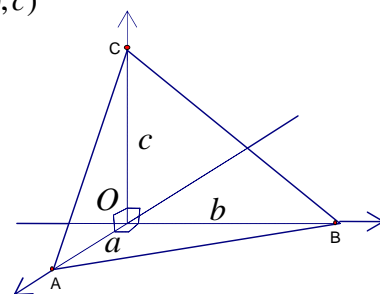
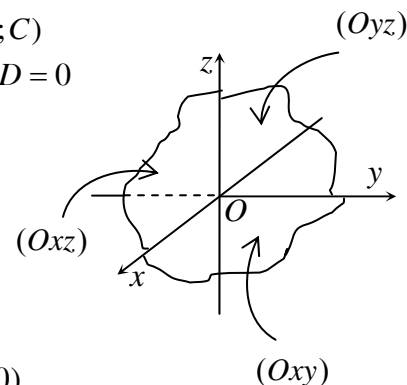
- $(Oxy): z = 0$
- $(Oyz): x = 0$
- $(Oxz): y = 0$

#### 2. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:

- Phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz tại  $\begin{cases} A(a; 0; 0) \\ B(0; b; 0) \\ C(0; 0; c) \end{cases} \quad (a, b, c \neq 0)$

là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



### BÀI TẬP ÁP DỤNG:

**Bài 1:** Trong Kg(Oxyz) cho ba điểm  $A(3;1;0)$ ,  $B(-1;2;-1)$ ,  $C(2;-1;3)$

Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

**Bài 2:** Cho điểm  $A(1;3;2)$ ,  $B(1;2;1)$ ,  $C(1;1;3)$

Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác.

### III. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng - Chùm mặt phẳng :

#### 1. Một số quy ước và ký hiệu:

Hai bộ n số :  $\begin{cases} (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (b_1, b_2, \dots, b_n) \end{cases}$  được gọi là tỷ lệ với nhau nếu có số  $t \neq 0$  sao cho  $\begin{cases} a_1 = tb_1 \\ a_2 = tb_2 \\ \vdots \\ a_n = tb_n \end{cases}$ .

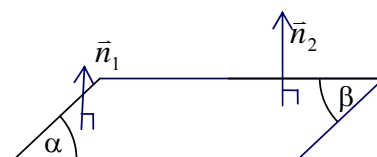
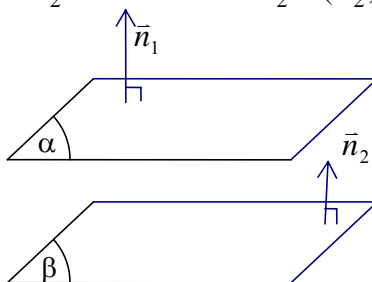
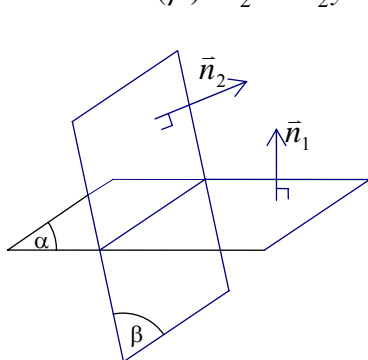
**Ký hiệu:**  $a_1 : a_2 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n$  hoặc  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

#### 2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

**Định lý:** Trong Kg(Oxyz) cho hai mặt phẳng  $\alpha, \beta$  xác định bởi phương trình :

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  có VTPT  $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$

$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  có VTPT  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$



$$(\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2 \quad (\text{hay: } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ hoặc } \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A_1}{A_2})$$

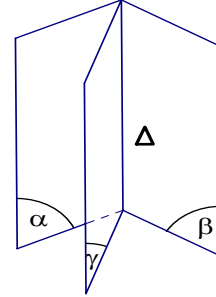
$$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

**Đặc biệt:**

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

### 3. Chùm mặt phẳng :



**a. Định nghĩa:** Tập hợp các mặt phẳng cùng đi qua một đường thẳng được gọi là một chùm mặt phẳng .

- $\Delta$  gọi là trục của chùm
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết
  - i. Trục của chùm
  - hoặc ii. Hai mặt phẳng của chùm

**b. Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai mặt phẳng  $\alpha, \beta$  cắt nhau xác định bởi phương trình :

$$(\alpha) : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$(\beta) : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

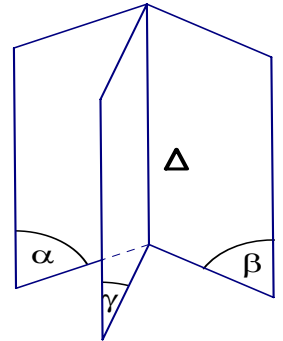
Khi đó : Mỗi mặt phẳng qua giao tuyến của  $\alpha$  và  $\beta$  đều có phương trình dạng:

$$(\gamma) : \lambda(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \mu(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

**Chú ý:**

$$\lambda = 0 \text{ và } \mu \neq 0 \text{ thì } \gamma \equiv \beta$$

$$\lambda \neq 0 \text{ và } \mu = 0 \text{ thì } \gamma \equiv \alpha$$



**Đặc biệt :**

Nếu  $\lambda \neq 0$  và  $\mu \neq 0$  thì  $\gamma \neq \alpha$  và  $\beta$  trong trường hợp này phương trình  $\gamma$  có thể viết dưới dạng sau:

$$1. m(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

$$\text{hoặc } 2. (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + n(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$$

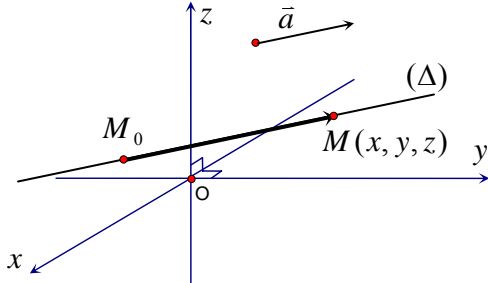


# ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

## I. Phương trình của đường thẳng:

### 1. Phương trình tham số của đường thẳng:

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) . Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  làm VTCP là :



$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

### 2. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) . Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  làm VTCP là :

$$(\Delta): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

### 3. Phương trình tổng quát của đường thẳng :

Trong không gian ta có thể xem đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng nào đó.

Xem  $(\Delta) = \alpha \cap \beta$  với  $\begin{cases} (\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$  ta có định lý sau.

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{với } A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$$

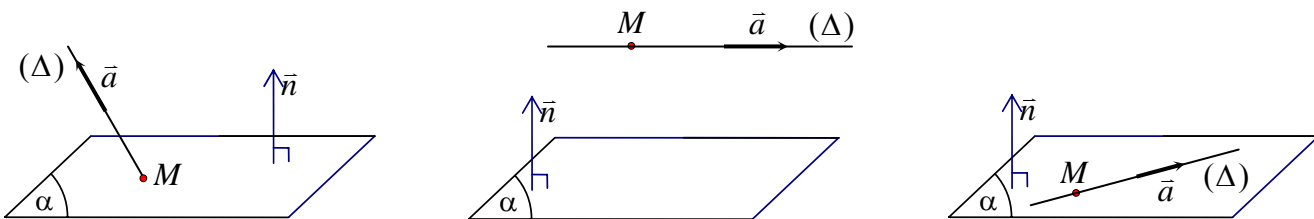
là phương trình tổng quát của một đường thẳng.

**Chú ý:** Nếu  $(\Delta): \begin{cases} (\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\vec{n}_\alpha = (A_1; B_1; C_1)) \\ (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\vec{n}_\beta = (A_2; B_2; C_2)) \end{cases}$  thì (Δ) có một VTCP là :

$$\vec{a} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = \left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

## II. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

### 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :



**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho :

đường thẳng  $(\Delta): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$  có VTCP  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$

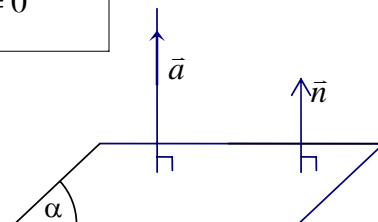
và mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$  có VTPT  $\vec{n} = (A; B; C)$

Khi đó :

$(\Delta) \text{ cắt } (\alpha)$	$\Leftrightarrow Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$
$(\Delta) \parallel (\alpha)$	$\Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$
$(\Delta) \subset (\alpha)$	$\Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$

**Đặc biệt:**

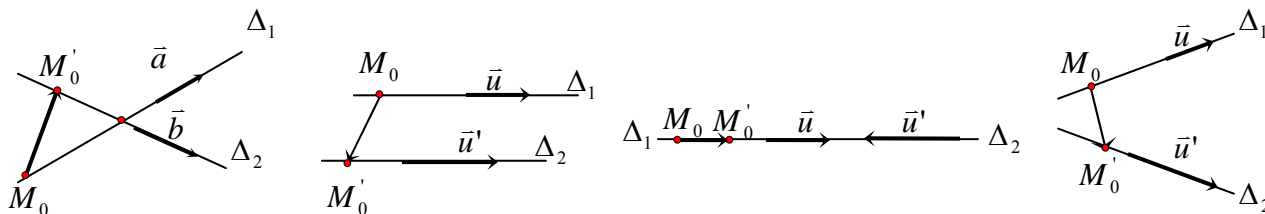
$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$
---



**Chú ý:** Muốn tìm giao điểm M của  $(\Delta)$  và  $(\alpha)$  ta giải hệ phương trình :  $\begin{cases} pt(\Delta) \\ pt(\alpha) \end{cases}$  tìm x,y,z

Suy ra: M(x,y,z)

### 2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng :



**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$  có VTCP  $\vec{u} = (a; b; c)$  và qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$(\Delta_2): \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$  có VTCP  $\vec{u'} = (a'; b'; c')$  và qua  $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$

- $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0$
- $(\Delta_1)$  cắt  $(\Delta_2)$   $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \\ a:b:c \neq a':b':c' \end{cases}$
- $(\Delta_1) // (\Delta_2)$   $\Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' \neq (x'_0 - x_0):(y'_0 - y_0):(z'_0 - z_0)$
- $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$   $\Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' = (x'_0 - x_0):(y'_0 - y_0):(z'_0 - z_0)$
- $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  chéo nhau  $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$

**Chú ý:** Muốn tìm giao điểm M của  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  ta giải hệ phương trình :  $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$  tìm x,y,z

Suy ra: M(x,y,z)

### III. Góc trong không gian:

#### 1. Góc giữa hai mặt phẳng:

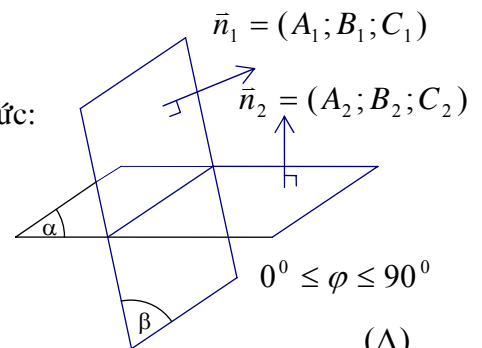
**Định lý:** Trong Kg(Oxyz) cho hai mặt phẳng  $\alpha, \beta$  xác định bởi phương trình :

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(\alpha)$  &  $(\beta)$  ta có công thức:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



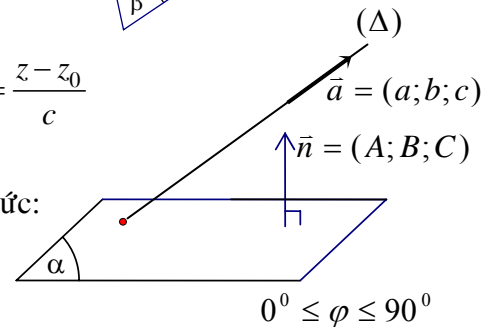
#### 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

**Định lý:** Trong Kg(Oxyz) cho đường thẳng  $(\Delta): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

và mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(\Delta)$  &  $(\alpha)$  ta có công thức:

$$\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



#### 3. Góc giữa hai đường thẳng :

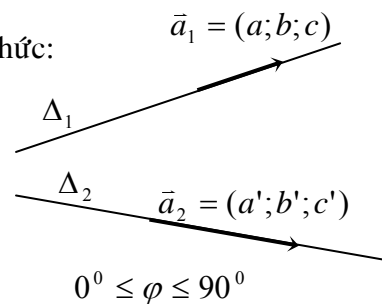
**Định lý:** Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$(\Delta_2): \frac{x-x'_0}{a'} = \frac{y-y'_0}{b'} = \frac{z-z'_0}{c'}$$

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(\Delta_1)$  &  $(\Delta_2)$  ta có công thức:

$$\cos \varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

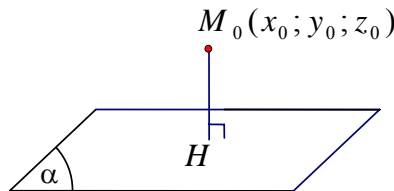


#### IV. Khoảng cách:

##### 1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$  và điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$

Khoảng cách từ điểm  $M_0$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  được tính bởi công thức:

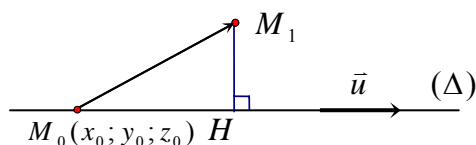


$$d(M_0; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

##### 2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho đường thẳng  $(\Delta)$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  và có VTCP

$\vec{u} = (a; b; c)$ . Khi đó khoảng cách từ điểm  $M_1$  đến  $(\Delta)$  được tính bởi công thức:



$$d(M_1, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

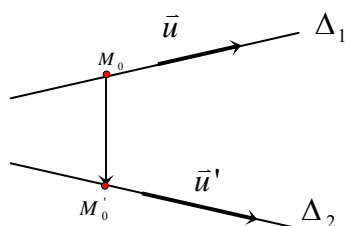
##### 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai đường thẳng chéo nhau :

$(\Delta_1)$  có VTCP  $\vec{u} = (a; b; c)$  và qua  $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$(\Delta_2)$  có VTCP  $\vec{u}' = (a'; b'; c')$  và qua  $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$

Khi đó khoảng cách giữa  $(\Delta_1)$  và  $(\Delta_2)$  được tính bởi công thức



$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{M_0M'_0} \wedge \vec{u} \wedge \vec{u}'|}{|\vec{u} \wedge \vec{u}'|}$$

# BÀI TẬP RÈN LUYỆN

-----\*\*\*-----

**Bài 1:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc  $\alpha$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$

**Bài 2:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho điểm A(0;1;2) và hai đường thẳng :

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \text{ \& } d_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với  $d_1$  và  $d_2$ .
2. Tìm tọa độ các điểm M thuộc  $d_1$ , N thuộc  $d_2$  sao cho ba điểm A,M,N thẳng hàng

**Bài 3:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho điểm A(1;2;3) và hai đường thẳng :

$$d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ \& } d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

1. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng  $d_1$
2. Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua A, vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$

**Bài 4:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho 4 điểm A(0;1;0), B(2;3;1), C(-2;2;2), D(1;-1;2) .

1. Chứng minh các tam giác ABC, ABD, ACD là các tam giác vuông .
2. Tính thể tích tứ diện ABCD.
3. Gọi H là trực tâm tam giác BCD, viết phương trình đường thẳng AH.

**Bài 5:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho 3 điểm A(1;1;2), B(-2;1;-1), C(2;-2;1).

1. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
2. Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (ABC).
3. Tính thể tích tứ diện OABC.

**Bài 6:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases} \text{ và } \Delta_2 : \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng  $\Delta_1$  và song song với đường thẳng  $\Delta_2$
2. Cho điểm M(2;1;4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng  $\Delta_2$  sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

**Bài 7:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho mặt phẳng (P) :  $2x-y+2=0$  và đường thẳng

$$d_m : \begin{cases} (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 \end{cases}$$

Xác định m để đường thẳng  $d_m$  song song với mặt phẳng (P)

**Bài 8:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho mặt phẳng (P) :  $x-y+z+3=0$  và hai điểm A(-1;-3;-2), B(-5;7;12)

1. Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P)
2. Giả sử M là điểm chạy trên mặt phẳng (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : MA+MB

**Bài 9:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho đường thẳng  $\Delta : \begin{cases} 2x+y+z+1=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$  và mặt phẳng (P):  $4x-2y+z-1=0$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $\Delta$  trên mặt phẳng (P).

**Bài 10:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai đường thẳng:  $d_1: \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$  và  $d_2: \begin{cases} ax + 3y - 3 = 0 \\ x - 3z - 6 = 0 \end{cases}$

1. Tìm a để hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau
2. Với  $a=2$ , viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng  $d_2$  và song song với đường thẳng  $d_1$ . Tính khoảng cách giữa  $d_1$  và  $d_2$  khi  $a=2$

**Bài 11:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b) ( $a>0, b>0$ ). Gọi M là trung điểm của cạnh CC'.

1. Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b
2. Xác định tỷ số  $\frac{a}{b}$  để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

**Bài 12:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho tứ diện ABCD với A(2;3;2), B(6;-1;-2), C(-1;-4;3), D(1;6;-5). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

**Bài 13:** 2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} 3x - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng  $d_1, d_2$  chéo nhau và vuông góc với nhau.
2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng  $d_1, d_2$  và song song với đường thẳng  $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$

**Bài 14:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho tứ diện OABC với A(0;0; $a\sqrt{3}$ ), B(a;0;0), C(0; $a\sqrt{3}$ ;0) ( $a>0$ ). Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

**Bài 15:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai điểm A(2;1;1),

$$B(0;-1;3) \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), chứng minh rằng d vuông góc với IK.
2. Viết phương trình tổng quát của hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng có phương trình  $x + y - z + 1 = 0$

**Bài 16:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M(0;1;1) sao cho  $\Delta$  vuông góc với  $(d_1)$  và cắt  $(d_2)$ .

**Bài 17:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5x + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

1. Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng trên.
3. Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M(-4;-5;3) sao cho  $\Delta$  cắt cả  $d_1$  và  $d_2$ .

**Bài 18:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{và} \quad (P): x - y - z - 1 = 0$$

Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua  $A(1;1;-2)$  sao cho  $\Delta \perp d$  và  $\Delta // (P)$ .

**Bài 19:** Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x-y+2z+1=0 \end{cases}$$

và mặt phẳng  $(P): x+y+z-1=0$ .

Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  sao cho  $\Delta \perp (P)$  và  $\Delta$  cắt cả hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$ .

**Bài 20:** Trong Kg(Oxyz) cho đường thẳng :

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} \text{ và điểm } I(2;-1;3)$$

Gọi K là điểm đối xứng của I qua (d). Tìm tọa độ điểm K.

**Bài 21:** Trong Kg(Oxyz) cho đường thẳng :

$$(d): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1} \text{ và điểm } A(1;2;1)$$

Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d).

**Bài 22:** Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm I của  $d_1$  và  $d_2$ .

2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua  $d_1$  và  $d_2$ .

3. Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi (P) và các mặt phẳng tọa độ.

**Bài 23:** Trong Kg(Oxyz) cho hai điểm  $A(1;2;1)$ ,  $B(2;1;3)$  và mặt phẳng  $(P): x-3y+2z-6=0$ .

1. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P).

2. Viết phương trình chính tắc của giao tuyến của (P) và (Q).

3. Gọi K là điểm đối xứng của A qua (P). Tìm tọa độ điểm K.

**Bài 24:** Trong Kg(Oxyz) cho hai điểm  $A(1;2;-1)$  và  $B(7;-2;3)$  và đường thẳng (d): 
$$\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$$

1. Chứng minh (d) và AB đồng phẳng.

2. Tìm tọa độ giao điểm  $I_0$  của đường thẳng (d) với mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

3. Tìm  $I \in (d)$  sao cho tam giác ABI có chu vi nhỏ nhất.

**Bài 25:** Trong Kg(Oxyz) cho hai điểm  $A(0;0;-3)$ ,  $B(2;0;-1)$  và mặt phẳng  $(P): 3x-8y+7z-1=0$

1. Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

2. Tìm điểm C thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC đều.

**Bài 26:** Trong Kg(Oxyz) cho hai điểm  $A(1;2;3)$ ,  $B(4;4;5)$  và mặt phẳng  $(P): z=0$

1. Tìm  $M \in (P)$  sao cho  $MA+MB$  là nhỏ nhất.

2. Tìm  $N \in (P)$  sao cho  $|NA-NB|$  là lớn nhất.

**Bài 27:** Trong Kg(Oxyz) cho hai điểm  $A(3;1;0)$ ,  $B(-9;4;9)$  và mặt phẳng  $(P): 2x-y+z+1=0$

Tìm  $M \in (P)$  sao cho  $|MA-MB|$  là lớn nhất.

**Bài 28:** Trong Kg(Oxyz) cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d): \frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{2} \text{ và } (P): x-y+3z+8=0$$

Viết phương trình hình chiếu của (d) lên (P)

**Bài 29:** Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x+3z-2=0 \\ y-3=0 \end{cases}$$

1. Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.
2. Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$ .

**Bài 30:** Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+5}{1} \text{ và } (d_2): \frac{x}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{3}$$

1. Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.
2. Tìm tọa độ các điểm A, B của đường vuông góc chung AB của  $d_1$  và  $d_2$ .

**Bài 31:** Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh : A(0;1;0); B(2;2;2); C(-2;3;4)

$$\text{và đường thẳng } (d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{2}.$$

1. Tìm tọa độ điểm M nằm trên (d) sao cho  $AM \perp AB$ .
2. Tìm tọa độ điểm N nằm trên (d) sao cho  $V_{NABC} = 3$ .

**Bài 32:** Trong Kg(Oxyz) cho O(0;0;0), A(6;3;0), B(-2;9;1) và S(0;5;8)

1. Chứng minh rằng  $SB \perp OA$ .
2. Chứng minh rằng hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng (OAB) vuông góc với OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Tìm tọa độ điểm K.
3. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh OS và AB. Tìm tọa độ M thuộc SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

**Bài 33:** Cho hai đường thẳng :

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z-5=0 \end{cases}$$

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$

**Bài 34:** Viết phương trình tham số của đường thẳng nằm trong mặt phẳng  $y+2z=0$  và cắt hai đường thẳng :

$$(d_1): \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x=2-t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}$$

**Bài 35:** Cho bốn điểm A(-4;4;0), B(2;0;4), C(1;2;-1), D(7;-2;3)

1. Chứng minh rằng bốn điểm A,B,C,D nằm trên cùng một mặt phẳng.
2. Tính khoảng cách từ C đến đường thẳng AB.
3. Tìm trên đường thẳng AB điểm M sao cho tổng MC+MD là nhỏ nhất.

**Bài 36:** Cho hình tứ diện ABCD biết tọa độ các đỉnh A(2,3,1) ; B(4,1,-2) ; C(6,3,7) ; D(-5,-4,8)  
Tính độ dài đường cao hình tứ diện xuất phát từ D.

**Bài 37:** Trong không gian Oxyz cho điểm A(-1,2,3) và hai mặt phẳng (P): $x-2=0$  , (Q): $y-z-1=0$   
Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua A và vuông góc với hai mặt phẳng (P) , (Q).

**Bài 38:** Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(1,3,2) , B(1,2,1) và C(1,1,3)  
Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua trọng tâm của tam giác ABC  
và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đó.

**Bài 39:** Lập phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm A(1,2,3) và vuông góc với hai đường thẳng  $(d_1): \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$  và  $(d_2): \begin{cases} x-y+4z+10=0 \\ 2x-4y-z+6=0 \end{cases}$

**Bài 40:** Lập phương trình của đường thẳng (d) đi qua điểm A(3,2,1) song song với mặt phẳng



(P):  $x+y+z-2=0$  và vuông góc với đường thẳng (d):  $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 4y+z+1=0 \end{cases}$

**Bài 41:** Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d):  $\begin{cases} x-3z-2=0 \\ y+5z-1=0 \end{cases}$  và có khoảng cách đến điểm  $A(1,-1,0)$  bằng 1.

**Bài 42:** Cho hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  có phương trình là :

$$(d_1): \begin{cases} x+8z+23=0 \\ y-4z+10=0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y+2z+2=0 \end{cases}$$

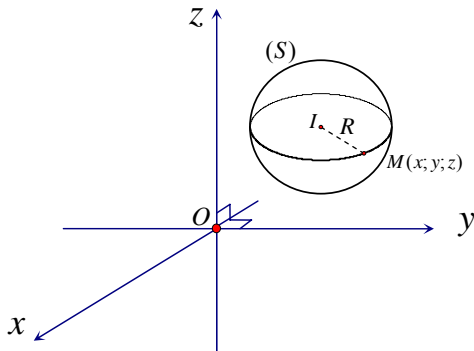
1. Chứng tỏ  $(d_1)$  và  $(d_2)$  chéo nhau.
2. Tính khoảng cách giữa  $(d_1)$  và  $(d_2)$ .
3. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  $(d_1)$ , mặt phẳng (Q) chứa  $(d_2)$  sao cho  $(P) \parallel (Q)$ .
4. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với Oz và cắt cả  $(d_1)$  và  $(d_2)$

## MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

### I. Phương trình mặt cầu:

#### 1. Phương trình chính tắc:

**Định lý :** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz). Phương trình của mặt cầu (S) tâm  $I(a;b;c)$ , bán kính R là :



$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu

**Đặc biệt:** Khi  $I \equiv O$  thì  $(C): x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

#### 2. Phương trình tổng quát:

**Định lý :** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz). Phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  là phương trình của mặt cầu (S) có tâm  $I(a;b;c)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .

### BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

Cho 4 điểm  $A(-1;-2;0)$ ,  $B(2;-6;3)$ ,  $C(3;-3;-1)$ ,  $D(-1;-5;3)$

Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu

### II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng:

**Định lý:** Trong K<sub>g</sub>(Oxyz) cho mặt phẳng  $(\alpha)$  và mặt cầu (S) có phương trình :

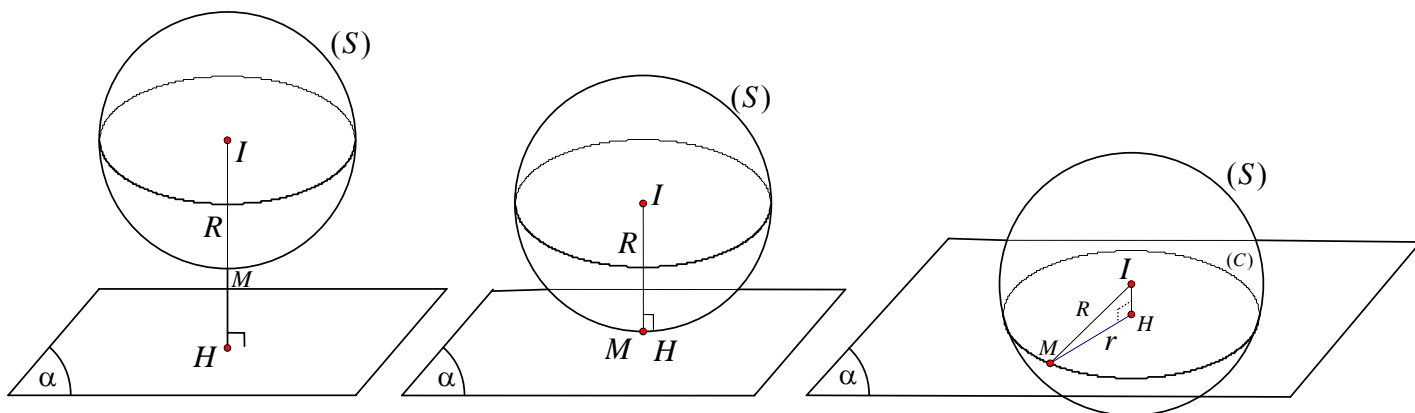
$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Gọi  $d(I; \alpha)$  là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng  $\alpha$

Ta có :

- |                                       |                                    |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $(\alpha)$ cắt mặt cầu $(S)$       | $\Leftrightarrow d(I; \alpha) < R$ |
| 2. $(\alpha)$ tiếp xúc mặt cầu $(S)$  | $\Leftrightarrow d(I; \alpha) = R$ |
| 3. $(\alpha)$ không cắt mặt cầu $(S)$ | $\Leftrightarrow d(I; \alpha) > R$ |



**Chú ý:**

Khi  $\alpha$  cắt mặt cầu  $(S)$  thì sẽ cắt theo một đường tròn  $(C)$ . Đường tròn  $(C)$  này có:

- Phương trình là: 
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \end{cases}$$
- Tâm là hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu trên mặt phẳng  $\alpha$
- Bán kính  $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, \alpha)}$

-----Hết-----