

**Chuyên đề 13:****TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG  
TÓM TẮT GIÁO KHOA****I. Bảng tính nguyên hàm cơ bản:****Bảng 1****Bảng 2**

Hàm số f(x)	Họ nguyên hàm F(x)+C	Hàm số f(x)	Họ nguyên hàm F(x)+C
a ( hằng số)	$ax + C$		
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$(ax+b)^\alpha$	$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b  + C$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$		
$e^x$	$e^x + C$	$e^{ax+b}$	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\frac{1}{a} \cot g(ax+b) + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x)  + C$	$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$
$\tan x$	$-\ln \cos x  + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\ln \left  x + \sqrt{x^2 + a^2} \right  + C$
$\cot x$	$\ln \sin x  + C$		

**Phương pháp 1:**

- Phân tích tích phân đã cho thành những tích phân đơn giản có công thức trong bảng nguyên hàm cơ bản
- Cách phân tích : Dùng biến đổi đại số như mũ, lũy thừa, các hằng đẳng thức ... và biến đổi lượng giác bằng các công thức lượng giác cơ bản.

**Ví dụ :** Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

1.  $f(x) = \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

2.  $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4x+3}$

## **Phương pháp 2: Sử dụng cách viết vi phân hóa trong tích phân**

**Ví dụ:** Tính các tích phân: 1.  $\int \cos^5 x \sin x dx$       2.  $\int \frac{\tan x}{\cos x} dx$       3.  $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$

### **I. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐƠN VÀ CÁC TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN**

**1. Định nghĩa:** Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{Công thức NewTon - Leiptnitz})$$

#### **2. Các tính chất của tích phân:**

• **Tính chất 1:** Nếu hàm số  $y=f(x)$  xác định tại  $a$  thì:  $\int_a^b f(x) dx = 0$

• **Tính chất 2:**  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

• **Tính chất 3:** Nếu  $f(x) = c$  không đổi trên  $[a; b]$  thì:  $\int_a^b c dx = c(b-a)$

• **Tính chất 4:** Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(x) \geq 0$  thì  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

• **Tính chất 5:** Nếu hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$  thì

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

• **Tính chất 6:** Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $m \leq f(x) \leq M$  ( $m, M$  là hai hằng số) thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

• **Tính chất 7:** Nếu hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  thì

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

• **Tính chất 8:** Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $k$  là một hằng số thì

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

• **Tính chất 9:** Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $c$  là một hằng số thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

• **Tính chất 10:** Tích phân của hàm số trên  $[a; b]$  cho trước không phụ thuộc vào biến số, nghĩa

là:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

**Bài 1:** Tính các tích phân sau:

1)  $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3} dx$

2)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$

3)  $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$

4)  $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx$

5)  $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-4x+4} dx$

6)  $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$

7)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$

8)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx$

9)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x} dx$

10)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2x dx$

11)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x} dx$

12)  $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$

13)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

14)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx$

15)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{2\cos 3x+1} dx$

16)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5-2\sin x} dx$

17)  $\int_{-2}^0 \frac{4}{x^2+2x-3} dx$

18)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$

**Bài 2:**

1)  $\int_{-3}^3 |x^2-1| dx$

2)  $\int_{-1}^4 |x^2-3x+2| dx$

3)  $\int_{-3}^5 (|x+2|-|x-2|) dx$

4)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} - 2 dx$

5)  $\int_0^3 |2^x-4| dx$

6)  $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} dx$

7)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$

8)  $\int_0^2 |x^2-x| dx$

**Bài 3:**1) Tìm các hằng số A, B để hàm số  $f(x) = A \sin \pi x + B$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$f'(1) = 2 \quad \text{và} \quad \int_0^2 f(x) dx = 4$$

2) Tìm các giá trị của hằng số a để có đẳng thức :  $\int_0^2 [a^2 + (4-4a)x + 4x^3] dx = 12$ **II. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ :**1) **DẠNG 1:** Tính  $I = \int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x) dx$  bằng cách đặt  $t = u(x)$ **Công thức đổi biến số dạng 1:**

$$\int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt$$

**Cách thực hiện:****Bước 1:** Đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$ **Bước 2:** Đổi cận :  $\begin{cases} x=b \\ x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=u(b) \\ t=u(a) \end{cases}$ **Bước 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$$I = \int_a^b f[u(x)] u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt \quad (\text{tiếp tục tính tích phân mới})$$

Tính các tích phân sau:

- 1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$
- 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$
- 3)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} dx$
- 4)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$
- 5)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x)^3 dx$
- 6)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$
- 7)  $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$
- 8)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$
- 9)  $\int_1^e \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx$
- 10)  $\int_0^1 x^5 (1-x^3)^6 dx$
- 11)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx$
- 12)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos 2x} dx$
- 13)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 + \sin 2x}} dx$
- 14)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$
- 15)  $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$
- 16)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2} dx$
- 17)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin 2x} dx$
- 18)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}^8 x) dx$
- 19)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$
- 20)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$
- 21)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$
- 22)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$
- 23)  $\int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$
- 24)  $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx$
- 25)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$

2) **DẠNG 2:** Tính  $I = \int_a^b f(x) dx$  bằng cách đặt  $x = \varphi(t)$

**Công thức đổi biến số dạng 2:**

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

**Cách thực hiện:**

**Bước 1:** Đặt  $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$

**Bước 2:** Đổi cận:  $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \beta \\ t = \alpha \end{cases}$

**Bước 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến  $t$  ta được

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (\text{tiếp tục tính tích phân mới})$$

Tính các tích phân sau:

- 1)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$
- 2)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$
- 3)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$
- 4)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$
- 5)  $\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$
- 6)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x + \sin x} dx$
- 7)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- 8)  $\int_1^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

$$\begin{array}{llll}
9) \int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx & 10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+3x^2}}{x^2} dx & 11) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}} dx & 12) \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\
13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7+\cos 2x}} dx & 14) \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6} dx & 15) \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx & 16) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} \\
17) \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+3x}} & 18) \int_1^2 \frac{x\sqrt{x-1}}{x-5} dx & & 
\end{array}$$

## II. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN:

Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{llll}
1) \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx & 2) \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx & 3) \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx & 4) \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^x+2}} dx \\
5) \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx & 6) \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3+1} dx & 7) \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} & 
\end{array}$$

## III. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

**Công thức tích phân từng phần:**

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx$$

Hay:

$$\int_a^b u dv = [u.v]_a^b - \int_a^b v du$$

**Cách thực hiện:**

**Bước 1:** Đặt  $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x)dx \\ v = v(x) \end{cases}$

**Bước 2:** Thay vào công thức tích phân từng phần:  $\int_a^b u dv = [u.v]_a^b - \int_a^b v du$

**Bước 3:** Tính  $[u.v]_a^b$  và  $\int_a^b v du$

Tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx & 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx & 3) \int_0^1 e^x \sin x dx \\
4) \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx & 5) \int_1^e x \ln^2 x dx & 6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx
\end{array}$$

$$7) \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2 \cos^2 x - 1) dx$$

$$9) \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$$

$$10) \int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx$$

$$11) \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

$$12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$$

$$13) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$14) \int_0^1 x t g^2 x dx$$

$$15) \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$$

$$16) \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$$

$$17) \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$18) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos^3 x) \sin x dx$$

$$19) \int_0^2 (2x+7) \ln(x+1) dx$$

$$20) \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$$

### MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍCH PHÂN QUAN TRỌNG VÀ ỨNG DỤNG

**Bài 1:** 1) CMR nếu  $f(x)$  lẻ và liên tục trên  $[-a;a]$  ( $a>0$ ) thì :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

2) CMR nếu  $f(x)$  chẵn và liên tục trên  $[-a;a]$  ( $a>0$ ) thì :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

**Bài 2:** 1) CMR nếu  $f(t)$  là một hàm số liên tục trên đoạn  $[0,1]$  thì:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

**ÁP DỤNG:** Tính các tích phân sau:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \quad \text{với } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

$$4) \int_0^{\pi} x \sin^5 x dx$$

$$5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{4 - \sin^2 x} dx$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1} dx$$

$$7) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{4 - \cos^2 x} dx$$

$$8) \int_0^{\pi} x \cos^4 x \sin^3 x dx$$

**Bài 3:** CMR nếu  $f(x)$  liên tục và chẵn trên  $\mathbb{R}$  thì  $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx$  với  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  và  $a > 0$ ;  $a \neq 1$

**ÁP DỤNG :** Tính các tích phân sau:

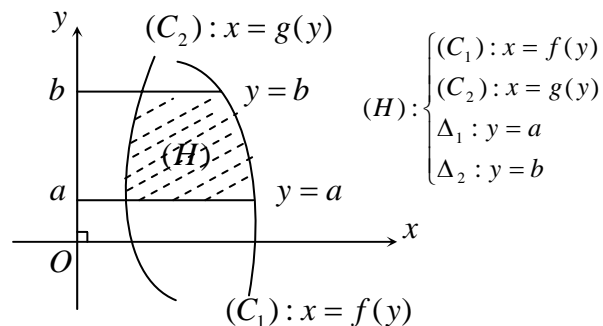
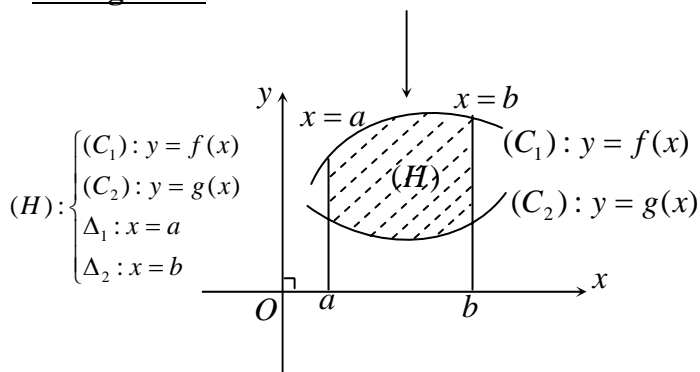
$$1) \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx$$

$$2) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x} dx$$

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx$$

#### IV. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG:

##### Công thức:



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$S = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy$$

Tính diện tích của các hình phẳng sau:

1)  $(H_1): \begin{cases} y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \\ y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \end{cases}$

2)  $(H_2): \begin{cases} y = |x^2 - 4x + 3| \\ y = x + 3 \end{cases}$

3)  $(H_3): \begin{cases} y = \frac{-3x-1}{x-1} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

4)  $(H_4): \begin{cases} y = x^2 \\ x = -y^2 \end{cases}$

5)  $(H_5): \begin{cases} y = |x| \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

6)  $(H_6): \begin{cases} y^2 + x - 5 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$

7)  $(H_7): \begin{cases} y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \\ y = 0 \\ x = e \\ x = 1 \end{cases}$

8)  $(H_8): \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$

9)  $(H_9): \begin{cases} y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = |x| \end{cases}$

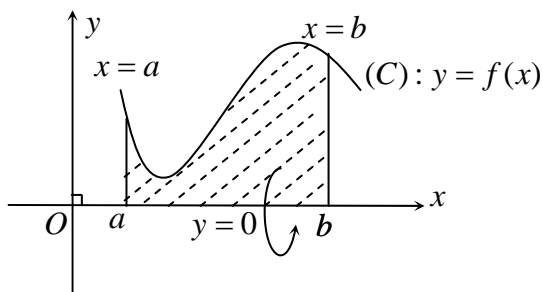
10)  $(H_{10}): \begin{cases} y^2 - 2y + x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

11)  $\begin{cases} (C): y = \sqrt{x} \\ (d): y = 2 - x \\ (Ox) \end{cases}$

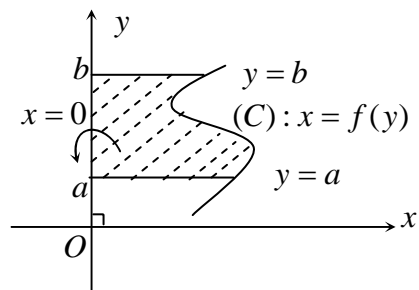
12)  $\begin{cases} (C): y = e^x \\ (d): y = 2 \\ (\Delta): x = 1 \end{cases}$

#### V. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY.

##### Công thức:



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

**Bài 1:** Cho miền D giới hạn bởi hai đường :  $x^2 + x - 5 = 0$  ;  $x + y - 3 = 0$

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

**Bài 2:** Cho miền D giới hạn bởi các đường :  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = 2 - x$ ;  $y = 0$

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Oy

**Bài 3:** Cho miền D giới hạn bởi hai đường :  $y = (x - 2)^2$  và  $y = 4$

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh:

a) Trục Ox

b) Trục Oy

**Bài 4:** Cho miền D giới hạn bởi hai đường :  $y = 4 - x^2$ ;  $y = x^2 + 2$ .

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

**Bài 5:** Cho miền D giới hạn bởi các đường :  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;  $y = \frac{x^2}{2}$

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

-----Hết-----