

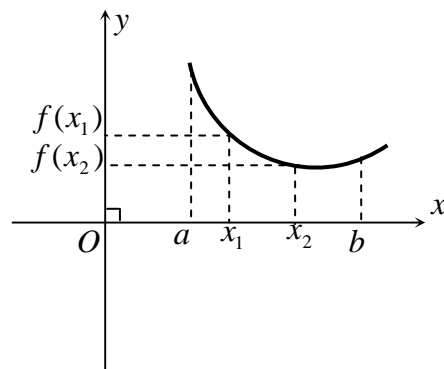
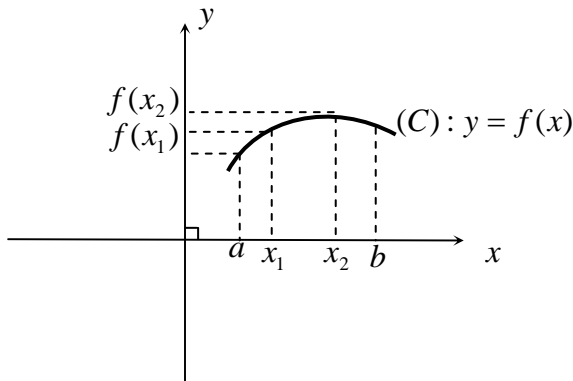
## Chuyên đề 11:

# ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

### Tóm tắt giáo khoa

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$

- $[f \text{ đồng biến (tăng) trên } (a; b)] \stackrel{\text{đn}}{\Leftrightarrow} [\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$
- $[f \text{ nghịch biến (giảm) trên } (a; b)] \stackrel{\text{đn}}{\Leftrightarrow} [\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$



### 1. Điều kiện cần của tính đơn điệu:

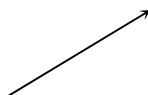
**Định lý 1:** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$

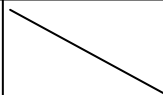
- $[f \text{ đồng biến (tăng) trên khoảng } (a; b)] \Rightarrow [f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)]$
- $[f \text{ nghịch biến (giảm) trên khoảng } (a; b)] \Rightarrow [f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a; b)]$

### 2. Điều kiện đủ của tính đơn điệu:

**Định lý 2:** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$

- $[f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b)] \Rightarrow [f \text{ đồng biến (tăng) trên } (a; b)]$
- $[f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b)] \Rightarrow [f \text{ nghịch biến (giảm) trên } (a; b)]$
- $[f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a; b)] \Rightarrow [f \text{ không đổi trên } (a; b)]$

$x$	$a$	$b$
$f'(x)$		+
$f(x)$		

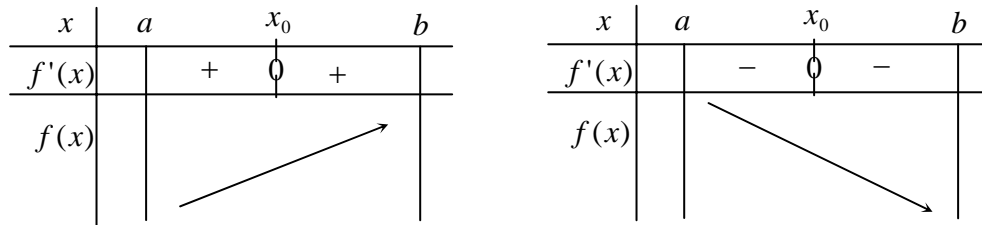
$x$	$a$	$b$
$f'(x)$		-
$f(x)$		

**Định lý 3:** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $(a;b)$

$$\left[ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a;b) \\ \text{đẳng thức chỉ xảy ra tại một số} \\ \text{hữu hạn điểm của } (a;b) \end{array} \right] \Rightarrow [f \text{ đồng biến (tăng) trên } (a;b)]$$

$$\left[ \begin{array}{l} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a;b) \\ \text{đẳng thức chỉ xảy ra tại một số} \\ \text{hữu hạn điểm của } (a;b) \end{array} \right] \Rightarrow [f \text{ nghịch biến (giảm) trên } (a;b)]$$

**Minh họa định lý:**



**Định lý 4:** Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $(a;b)$

- $[f \text{ đồng biến (tăng) trên } (a;b)] \Leftrightarrow [f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a;b)]$
- $[f \text{ nghịch biến (giảm) trên } (a;b)] \Leftrightarrow [f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a;b)]$
- $[f \text{ không đổi trên } (a;b)] \Leftrightarrow [f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a;b)]$

### 3. Phương pháp xét chiều biến thiên của hàm số:

Muốn xét chiều biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  ta có thể thực hiện như sau:

**Bước 1:** Tìm miền xác định của hàm số :  $D=?$

**Bước 2:** Tính  $f'(x)$  và xét dấu  $f'(x)$

**Bước 3:** Dựa vào định lý điều kiện đủ để kết luận.

### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Bài 1:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

- |                          |                                   |                                   |
|--------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = x\sqrt{4-x}$     | 2) $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ | 3) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| 4) $y = e^{-x^2+x}$      | 5) $y = \frac{e^x}{x}$            | 6) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$   |
| 7) $y = \frac{x}{\ln x}$ | 8) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$  | 9) $y = x + \sqrt{2-x^2}$         |

- Bài 2:** Cho hàm số  $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2a+1)x - 3a + 2$  (1). Tìm a để hàm số nghịch biến trên R
- Bài 3:** Tìm m để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$  đồng biến trên khoảng (0;3)
- Bài 4:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$  (1)
- a) Với giá trị nào của m, hàm số (1) đồng biến trên R  
b) Với giá trị nào của m, hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1;+∞)
- Bài 5:** Cho hàm số  $y = f(x) = x + 2 + \frac{m}{x-1}$  (1)
- Tìm a để hàm số (1) đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó
- Bài 6:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x-1}$  (1)
- Tìm a để hàm số (1) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó
- Bài 7:** Cho hàm số :  $y = \frac{-2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x-m}$ . Định m để hàm số đồng biến trong khoảng (1;+∞)
- Bài 8:** Chứng minh rằng:  $2\sin x + \tan x > 3x$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- Bài 9:** Chứng minh rằng:  $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- Bài 10:** Chứng minh rằng:  $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$  với mọi  $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
- Bài 11:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (2a-1)x - a + 2$
- Tìm a để hàm số nghịch biến trong khoảng (-2;0)
- Bài 12:** Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 + x + 1$  (1)
- Tìm các giá trị của m để hàm số (1) nghịch biến trong khoảng (1;2)
- Bài 13:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x-1}$
- Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .
- Bài 14:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2x + m}{x-2}$
- Xác định m để hàm số nghịch biến trên [-1;0].
- Bài 15:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 5x + m^2 + 6}{x+3}$
- Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
- Bài 16:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (2m-3)x + m - 1}{x - (m-1)}$
- Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

# ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

\*\*\*\*\*

Cơ sở để giải quyết vấn đề này là dùng đạo hàm để xét tính đơn điệu của hàm số và dựa vào chiều biến thiên của hàm số để kết luận về nghiệm của phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.

## CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

-----

**I. Định nghĩa :** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trong khoảng  $(a,b)$ .

a)  $f$  tăng ( hay đồng biến ) trên khoảng  $(a,b)$   $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b)  $f$  giảm ( hay nghịch biến ) trên khoảng  $(a,b)$   $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**II. Các tính chất :**

1) **Tính chất 1:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  tăng (hoặc giảm) trên khoảng  $(a,b)$  ta có :

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \quad (\text{với } u, v \in (a,b))$$

2) **Tính chất 2:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  tăng trên khoảng  $(a,b)$  ta có :

$$f(u) < f(v) \Leftrightarrow u < v \quad (\text{với } u, v \in (a,b))$$

3) **Tính chất 3:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  giảm trên khoảng  $(a,b)$  ta có :

$$f(u) < f(v) \Leftrightarrow u > v \quad (\text{với } u, v \in (a,b))$$

4) **Tính chất 4:**

Nếu  $y = f(x)$  tăng trên  $(a,b)$  và  $y = g(x)$  là hàm hằng hoặc là một hàm số giảm trên  $(a,b)$  thì phương trình  $f(x) = g(x)$  có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng  $(a,b)$

\*Dựa vào tính chất trên ta suy ra :

Nếu có  $x_0 \in (a,b)$  sao cho  $f(x_0) = g(x_0)$  thì phương trình  $f(x) = g(x)$  có nghiệm duy nhất trên  $(a,b)$

## BÀI TẬP ỨNG DỤNG

**Bài 1 :** Giải các phương trình sau :

1)  $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

2)  $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^x + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^x = 2^x$

3)  $\log_2(1+\sqrt[3]{x}) = \log_7 x$

**Bài 2 :** Giải các phương trình sau:

1)  $2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$

$$2) \log_3 \left( \frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} \right) = x^2 + 3x + 2$$

**Bài 3 :** Giải các hệ :

$$1) \begin{cases} \cot gx - \cot gy = x - y \\ 5x + 8y = 2\pi \end{cases} \quad \text{với } x, y \in (0, \pi)$$

$$2) \begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x) \cdot (xy + 2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

**Bài 4:** Giải các bất phương trình sau.

$$1) 5^x + 12^x > 13^x$$

$$2) x(x^8 + x^2 + 16) > 6(4 - x^2)$$

**Bài 5 :** Chứng minh các bất đẳng thức sau :

$$1) e^x > 1 + x \quad \text{với } x > 0$$

$$2) \ln(1 + x) < x \quad \text{với } x > 0$$

$$3) \sin x < x \quad \text{với } x > 0$$

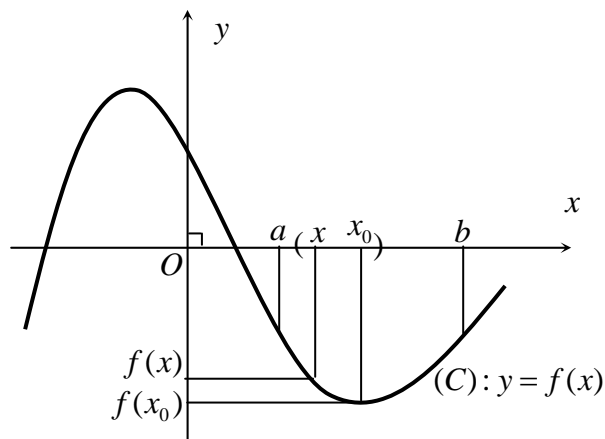
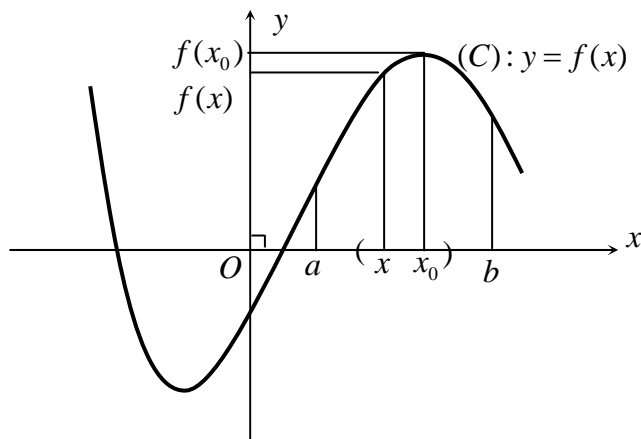
$$4) 1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x \quad \text{với } x \neq 0$$

-----Hết-----

# CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

## Tóm tắt giáo khoa

**I. Định nghĩa:** Cho hàm số  $y=f(x)$  xác định trên khoảng  $(a;b)$  và  $x_0 \in (a;b)$



- $[x_0 \text{ là điểm CỰC ĐẠI của hàm số } f] \Leftrightarrow [f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}]$
- $[x_0 \text{ là điểm CỰC TIỂU của hàm số } f] \Leftrightarrow [f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}]$

## II. Điều kiện cần của cực trị:

**Định lý Fermat :** Giả sử  $y=f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a;b)$  và  $x_0 \in (a;b)$

$$\begin{bmatrix} f \text{ có đạo hàm tại } x_0 \\ f \text{ đạt cực trị tại } x_0 \end{bmatrix} \Rightarrow [f'(x_0) = 0]$$

### Ý nghĩa hình học của định lý:

Nếu hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x_0$  và đạt cực trị tại điểm đó thì tiếp tuyến của đường cong  $(C): y=f(x)$  tại điểm  $M(x_0, f(x_0))$  phải cùng phương với  $Ox$

## III. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:

1) **Định lý 1:** Giả sử hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm trên một lân cận của điểm  $x_0$  (có thể trừ tại điểm  $x_0$ )

- $\begin{bmatrix} \text{Nếu khi } x \text{ đi qua } x_0 \text{ mà} \\ f'(x) \text{ đổi dấu từ } + \text{ sang } - \end{bmatrix} \Rightarrow [f \text{ đạt CỰC ĐẠI tại } x_0]$
- $\begin{bmatrix} \text{Nếu khi } x \text{ đi qua } x_0 \text{ mà} \\ f'(x) \text{ đổi dấu từ } - \text{ sang } + \end{bmatrix} \Rightarrow [f \text{ đạt CỰC TIỂU tại } x_0]$

### Bảng tóm tắt:

$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

CD

$x$	$a$	$x_0$	$b$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

CT

**2) Định lý 2:** Giả sử hàm số  $y=f(x)$  có đạo hàm liên tục tới cấp hai tại  $x_0$  và  $f'(x_0)=0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$

- $\left[ \text{Nếu } f''(x_0) < 0 \right] \Rightarrow \left[ f \text{ đạt CỰC ĐẠI tại } x_0 \right]$
- $\left[ \text{Nếu } f''(x_0) > 0 \right] \Rightarrow \left[ f \text{ đạt CỰC TIỂU tại } x_0 \right]$

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**Bài 1:** Tìm cực trị của các hàm số:

1)  $y = x\sqrt{4-x}$

2)  $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

3)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

4)  $y = e^{-x^2+x}$

5)  $y = \frac{e^x}{x}$

6)  $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$

7)  $y = \frac{x}{\ln x}$

8)  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

9)  $y = x + \sqrt{2-x^2}$

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ . Tìm  $m$  để  $y$  đạt cực đại, cực tiểu tại hai điểm  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

**Bài 3:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ . Xác định  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ thỏa mãn  $x_1 + x_2 = 4x_1x_2$

**Bài 4:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  đạt cực đại tại  $x = 2$

**Bài 5:** Giả sử hàm số  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  đạt cực trị tại  $x_0$ . Chứng minh rằng nếu

$$v'(x_0) \neq 0 \text{ thì } f(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$$

**Áp dụng:** Tìm giá trị cực trị của hàm số:  $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$

**Bài 6:** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Chia  $f(x)$  cho  $f'(x)$ , ta được:

$$f(x) = f'(x).(Ax + B) + \alpha x + \beta$$

Giả sử  $f(x)$  đạt cực trị tại  $x_0$  Chứng minh rằng:  $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$

**Áp dụng:** Tìm giá trị cực trị của hàm số:  $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

**Bài 7:** Gọi  $(C_m)$  là đồ thị hàm số  $y = mx + \frac{1}{x}$  (1)

Tìm  $m$  để hàm số (1) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của  $(C_m)$  đến tiệm cận xiên của  $(C_m)$  bằng  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Bài 8:** Gọi  $(C_m)$  là đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$  (1)

Chứng minh rằng với  $m$  bất kỳ, đồ thị  $(C_m)$  luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng  $\sqrt{20}$

**Bài 9:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ . Tìm  $m$  sao cho hàm số đạt cực đại tại  $x = -1$

**Bài 10:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$

Tìm  $m$  sao cho hàm số có hai cực trị có hoành độ dương

**Bài 11:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + x + m}{x + 1}$  (1)

Xác định  $m$  sao cho hàm số (1) có hai giá trị cực trị trái dấu nhau.

**Bài 12:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2m - 3)x + 4$  (1)

Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và cực tiểu ở về hai phía của trục tung

**Bài 13:** Cho hàm số :  $y = (x - m)^3 - 3x$

Xác định  $m$  để hàm số đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ  $x = 0$ .

**Bài 14:** Cho hàm số :  $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$

Tìm  $m$  để hàm số có ba điểm cực trị.

**Bài 15:** Cho hàm số :  $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

**Bài 16:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$

Tìm  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu. Với giá trị nào của  $m$  thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng 10.

**Bài 17:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$

Xác định  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ thỏa mãn  $x_1 + x_2 = 4x_1 \cdot x_2$



# GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ

## Tóm tắt giáo khoa

**1. Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $D$

- Số  $M$  được gọi là GTLN của hàm số nếu:

$$\begin{cases} f(x) \leq M & \forall x \in D \\ \text{Tồn tại } x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M \end{cases}$$

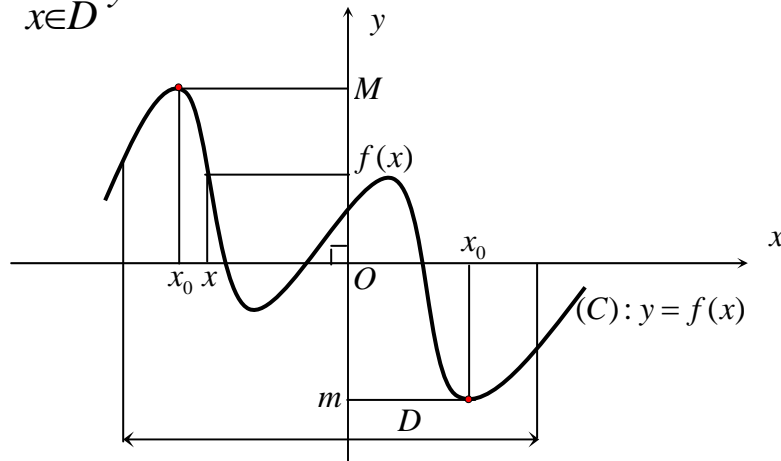
**Ký hiệu:**  $M = \max_{x \in D} y$

- Số  $m$  được gọi là GTNN của hàm số nếu:

$$\begin{cases} f(x) \geq m & \forall x \in D \\ \text{Tồn tại } x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = m \end{cases}$$

**Ký hiệu:**  $m = \min_{x \in D} y$

Minh họa:



## 2. Các phương pháp tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $D$

### a) Phương pháp 1: Sử dụng bất đẳng thức

**Ví dụ 1:** Tìm GTLN và nhỏ nhất của hàm số:  $y = x + \frac{2}{x}$  với  $x > 0$

**Ví dụ 2:** Tìm GTNN của hàm số:  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

### b) Phương pháp 2: Sử dụng điều kiện có nghiệm của pt hoặc hệ phương trình

**Ví dụ:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + x + 2}$

### b) Phương pháp 2: Sử dụng đạo hàm, lập BBT của hàm số $f$ trên $D$ rồi suy ra kết quả

**Ví dụ 1:** Tìm GTLN của hàm số:  $y = 4x^3 - 3x^4$

**Ví dụ 2:** Tìm GTNN của hàm số:  $y = x^2 + \frac{2}{x}$  với  $x > 0$

**Ví dụ 3:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

**Ví dụ 4:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = \sin 2x - x$  trên  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

**Ví dụ 5:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$  trên  $[0; \pi]$

**Ví dụ 6:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = x + \sqrt{2-x^2}$

**Ví dụ 7:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = \sin x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$

**Ví dụ 8:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = 2(1 + \sin 2x \cdot \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$$

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**Bài 1:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 9x \quad \text{với } x \in [-2; 2]$$

**Bài 2:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = \sin 2x - x \quad \text{trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

**Bài 3:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = x^2 \cdot e^x \quad \text{trên } [-3; 2]$$

**Bài 4:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = 5\cos x - \cos 5x$  trên  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

**Bài 5:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + x + 2}$

**Bài 6:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$

**Bài 7:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = (x+2)\sqrt{4-x^2}$

**Bài 8:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = (3-x)\sqrt{x^2+1} \quad \text{với } x \in [0; 2]$$

**Bài 9:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:  $y = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$

**Bài 10:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x \quad \text{trên đoạn } [0; \pi]$$

**Bài 11:** Tìm GTNN của hàm số:  $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$  trên đoạn  $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$

**Bài 12:** Cho phương trình  $x^2 + (2a - 6)x + a - 13 = 0$  với  $a \geq 1$ . Tìm  $a$  để nghiệm lớn của phương trình đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 13:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$  (1)

Xác định các giá trị của  $m$  để hàm số có cực trị. Tìm  $m$  để tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 14:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^2 - 3\sin 2x$$

**Bài 15:** Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số sau :

$$y = 4\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin x + 7\sin^2 x$$

**Bài 16:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số :  $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

**Bài 17:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = 2(1 + \sin 2x \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$$

**Bài 18:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:  $y = 2(\sin^3 x + \cos^3 x) + 8\sin x \cdot \cos x$

**Bài 19:** Chứng minh các bất đẳng thức sau :  $\frac{1}{8} \leq (1 - \sin x)^4 + \sin^4 x \leq 17 \quad \forall x \in R$

-----Hết-----