

Chuyên đề 10:

CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. BÀI TOÁN 1 :

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CÓ MANG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

TÓM TẮT GIÁO KHOA

Phương pháp chung:

Để vẽ đồ thị của hàm số có mang dấu giá trị tuyệt đối ta có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Xét dấu các biểu thức chứa biến bên trong dấu giá trị tuyệt đối .

Bước 2: Sử dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối

Phân tích hàm số đã cho thành các phần không có chứa dấu giá trị tuyệt đối
(Dạng hàm số cho bởi nhiều công thức)

Bước 3: Vẽ đồ thị từng phần rồi ghép lại(Vẽ chung trên một hệ trục tọa độ)

* Các kiến thức cơ bản thường sử dụng:

1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối :

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

2. Định lý cơ bản:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$$

3. Một số tính chất về đồ thị:

- a) Đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành
- b) Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng
- c) Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

* Ba dạng cơ bản:

Bài toán tổng quát:

Từ đồ thị $(C): y=f(x)$, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau:
$$\begin{cases} (C_1): y = |f(x)| \\ (C_2): y = f(|x|) \\ (C_3): |y| = f(x) \end{cases}$$

Dạng 1: Từ đồ thị

$$(C) : y = f(x) \rightarrow (C_1) : y = |f(x)|$$

Cách giải

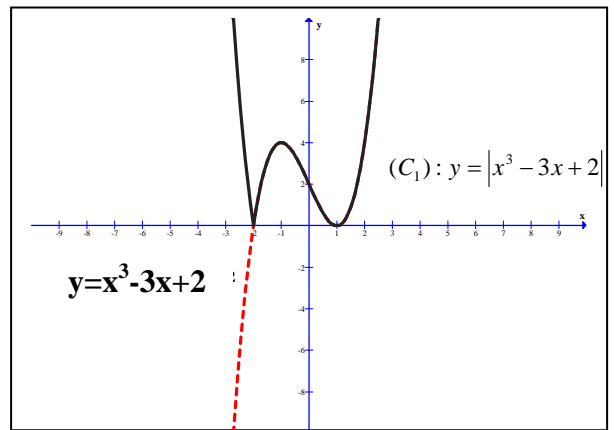
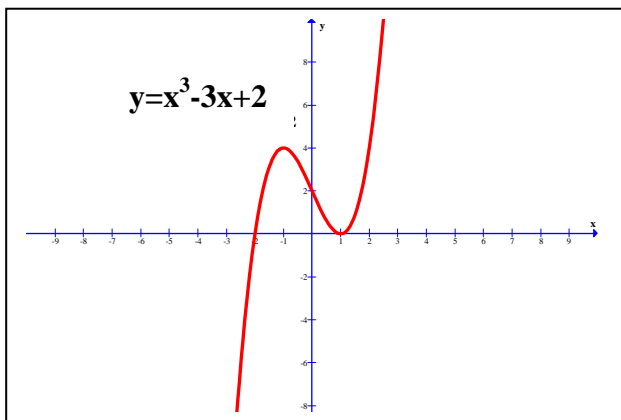
B1. Ta có : $(C_1) : y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ (1)

(2)

B2. Từ đồ thị (C) đã vẽ ta có thể suy ra đồ thị (C₁) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox (do (1))
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox (do (2))
- Bỏ phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox ta sẽ được (C₁)

Minh họa



Dạng 2: Từ đồ thị

$$(C) : y = f(x) \rightarrow (C_2) : y = f(|x|) \text{ (đây là hàm số chẵn)}$$

Cách giải

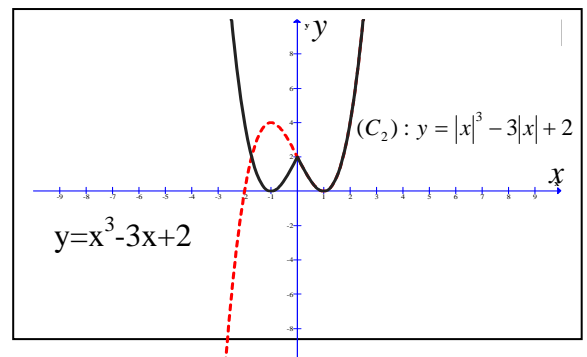
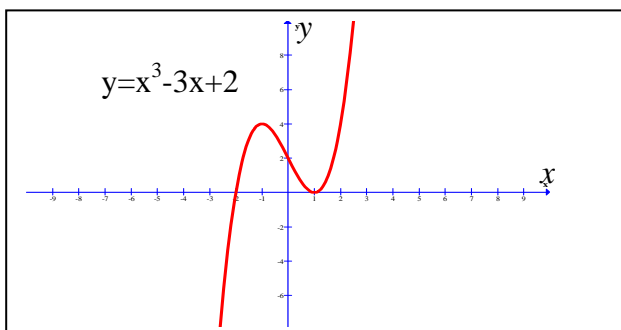
B1. Ta có : $(C_2) : y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ (1)

(2)

B2. Từ đồ thị (C) đã vẽ ta có thể suy ra đồ thị (C₂) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy (do (1))
- Lấy đối xứng qua Oy phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy (do tính chất hàm chẵn)
- Bỏ phần đồ thị (C) nằm phía bên trái trục Oy (nếu có) ta sẽ được (C₂)

Minh họa:



Dạng 3: Từ đồ thị

$$(C): y = f(x) \rightarrow (C_3): |y| = f(x)$$

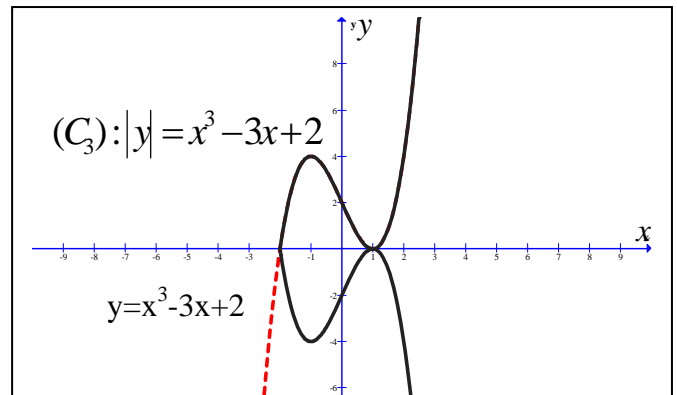
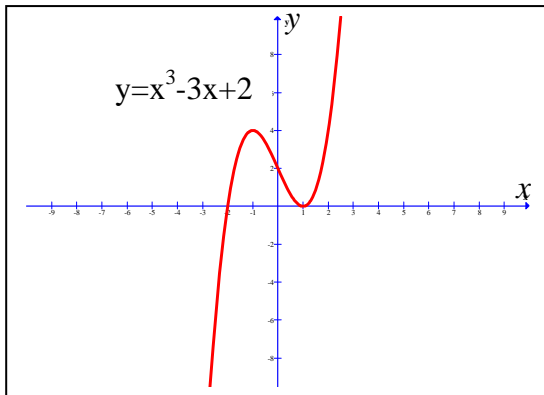
Cách giải

$$\text{B1. Ta có: } (C_3): |y| = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \begin{cases} y = f(x) & (1) \\ y = -f(x) & (2) \end{cases} \end{cases}$$

B2. Từ đồ thị (C) đã vẽ ta có thể suy ra đồ thị (C₃) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox (do (1))
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox (do (2))
- Bỏ phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox ta sẽ được (C₃)

Minh họa:



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)
2. Từ đồ thị (C) đã vẽ, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau:

a) $y = |-x^3 + 3x|$

b) $y = -|x|^3 + 3|x|$

c) $|y| = -x^3 + 3x$

Bài 2: Cho hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)
2. Từ đồ thị (C) đã vẽ, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

b) $y = \frac{|x|+1}{|x|-1}$

c) $|y| = \frac{x+1}{x-1}$

d) $y = \frac{|x+1|}{x-1}$

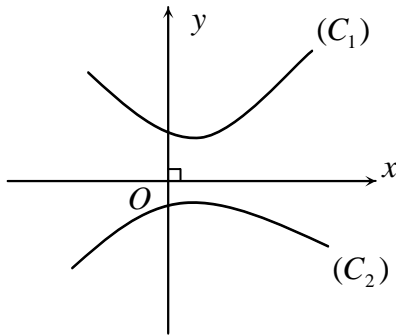
e) $y = \frac{x+1}{|x-1|}$

2. BÀI TOÁN 2 :

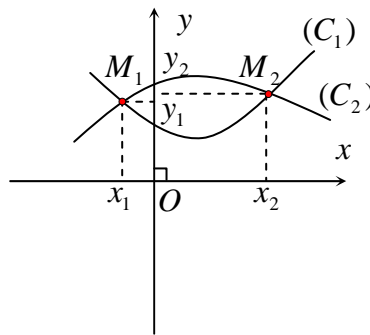
SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

Bài toán tổng quát:

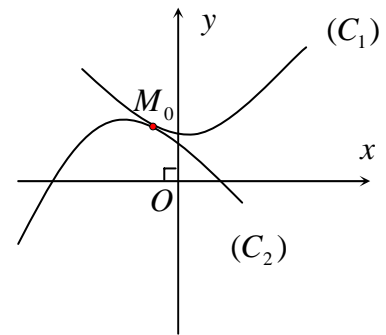
Trong mp(Oxy) . Hãy xét sự tương giao của đồ thị hai hàm số : $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : y = g(x) \end{cases}$



(C_1) và (C_2) không có điểm chung



(C_1) và (C_2) cắt nhau



(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

Phương pháp chung:

* Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

* Khảo sát nghiệm số của phương trình (1) . Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .

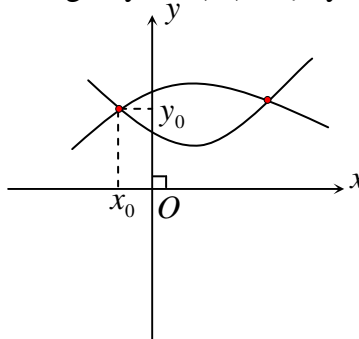
Ghi nhớ: Số nghiệm của pt (1) = số giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .

Chú ý 1 :

- * (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không có điểm chung
- * (1) có n nghiệm $\Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) có n điểm chung

Chú ý 2 :

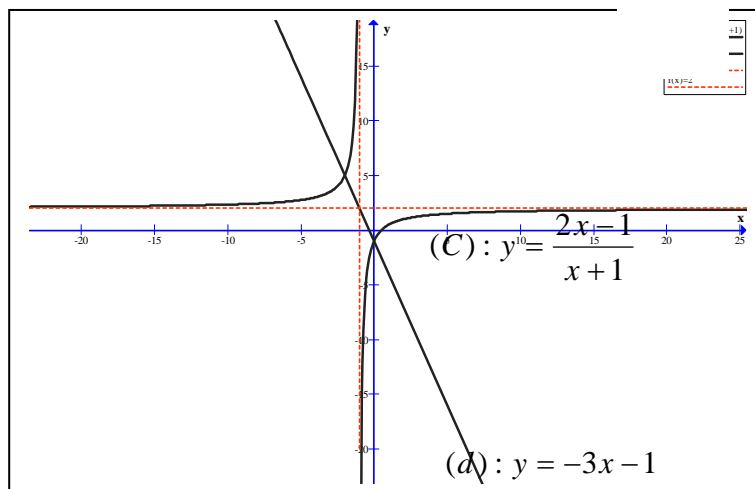
- * Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ điểm chung của (C_1) và (C_2) . Khi đó tung độ điểm chung là $y_0 = f(x_0)$ hoặc $y_0 = g(x_0)$.



Áp dụng:

Ví dụ: Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$ và đường thẳng (d): $y = -3x-1$

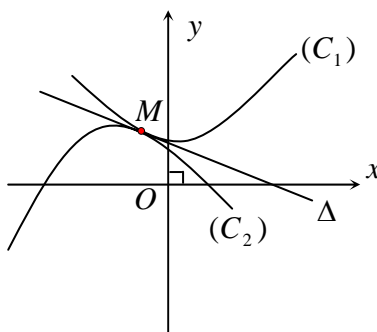
Minh họa:



b. Điều kiện tiếp xúc của đồ thị hai hàm số :

Định lý :

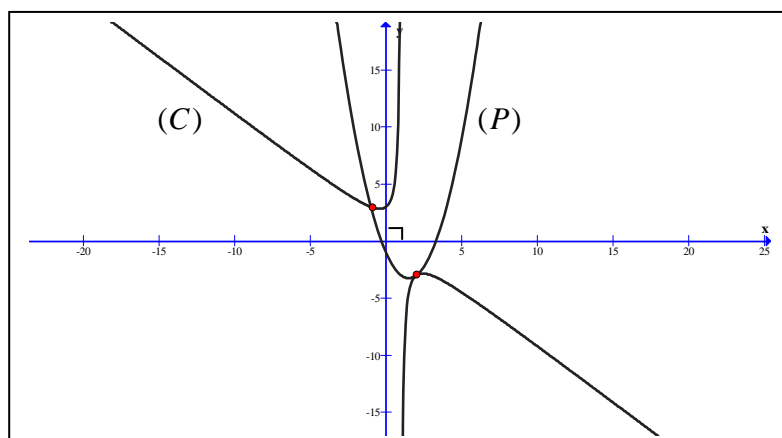
$$(C_1) \text{ tiếp xúc với } (C_2) \Leftrightarrow \text{hệ : } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$



Áp dụng:

Ví dụ: Cho $(P): y = x^2 - 3x - 1$ và $(C): y = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x - 1}$. Chứng minh rằng (P) và (C) tiếp xúc nhau

Minh họa:



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ (1)

Xác định m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 2: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ (C)

Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm M(0;-1) và có hệ số góc bằng k. Tìm k để đường thẳng (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C)

Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A(3;20) và có hệ số góc bằng m. Tìm m để đường thẳng (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Bài 4: Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1)

Xác định m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ (1)

Tìm m để đường thẳng (d): $y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ (1)

Tìm m để đường thẳng (d): $y = m(x-3) + 1$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$

Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d): $y = mx + 2 - m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ (1)

Định m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$.

Bài 10: Tìm m để tiệm cận xiên của hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ cắt các trục tọa độ tại hai điểm A, B sao cho

diện tích tam giác OAB bằng 8.

Bài 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2; \frac{2}{5})$ sao cho (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân A, B và M là trung điểm của AB.

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$ (1)

Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$

Bài 13: Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ (1)

Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với trục hoành. Xác định tọa độ tiếp điểm trong mỗi trường hợp tìm được

Bài 14: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M(0;1) và tiếp xúc với đồ thị hàm số

Bài 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ (C)

Tìm trên (C) tất cả các cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(\frac{1}{2};1)$

Bài 16: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ (C) và hai đường thẳng $(d_1): y = -x + m$ & $(d_2): y = x + 3$

Tìm tất cả các giá trị của m để (C) cắt (d_1) tại hai điểm phân biệt A, B đối xứng nhau qua (d_2)

Bài 17: Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ (1)

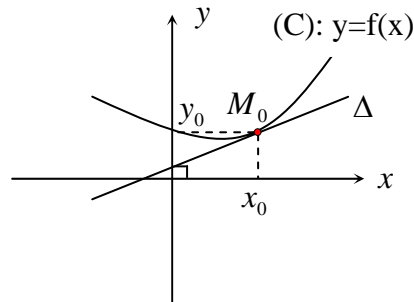
Chứng minh rằng đường thẳng $(d): y = 3x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, hãy tìm m để I nằm trên đường thẳng $(\Delta): y = 2x + 3$

3. BÀI TOÁN 3:

TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG CONG

a. Dạng 1:

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$



Phương pháp:

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y - y_0 = k (x - x_0)$$

Trong đó : x_0 : hoành độ tiếp điểm

y_0 : tung độ tiếp điểm và $y_0 = f(x_0)$

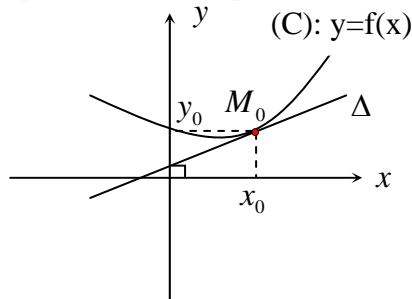
k : hệ số góc của tiếp tuyến và được tính bởi công thức : $k = f'(x_0)$

Áp dụng:

Ví dụ: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ tại điểm uốn của nó

b. Dạng 2:

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$ biết tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước



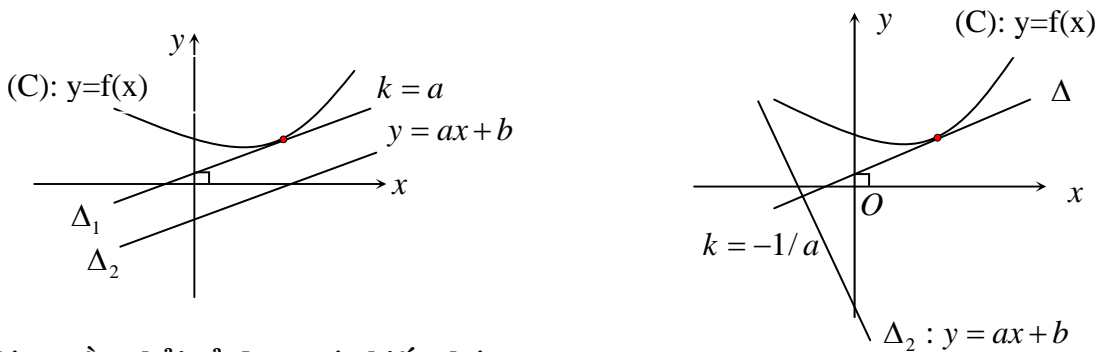
Phương pháp: Ta có thể tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)

Bước 2: Tìm x_0 bằng cách giải phương trình : $f'(x_0) = k$, từ đó suy ra $y_0 = f(x_0) = ?$

Bước 3: Thay các yếu tố tìm được vào pt: $y - y_0 = k (x - x_0)$ ta sẽ được pttt cần tìm.

Chú ý: Đối với dạng 2 người ta có thể cho hệ số góc k dưới dạng gián tiếp như: **tiếp tuyến song song**, **tiếp tuyến vuông góc với một đường thẳng cho trước**.



Khi đó ta cần phải sử dụng các kiến thức sau:

Định lý 1: Nếu đường thẳng (Δ) có phương trình dạng: $y = ax + b$ thì hệ số góc của (Δ) là:

$$k_{\Delta} = a$$

Định lý 2: Nếu đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với $x_A \neq x_B$ thì hệ số góc của (Δ) là:

$$k_{\Delta} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Định lý 3: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) . Khi đó:

$$\begin{aligned} \Delta_1 // \Delta_2 &\Leftrightarrow k_{\Delta_1} = k_{\Delta_2} \\ \Delta_1 \perp \Delta_2 &\Leftrightarrow k_{\Delta_1} \cdot k_{\Delta_2} = -1 \end{aligned}$$

Áp dụng:

Ví dụ 1: Cho đường cong (C): $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$

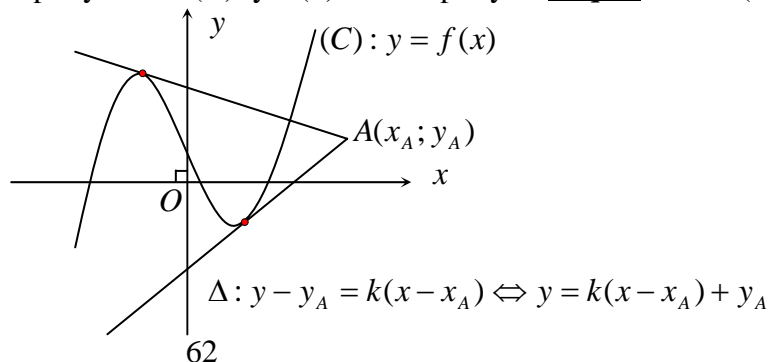
Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): $y = 4x + 2$.

Ví dụ 2: Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): y = -3x$

c. Dạng 3:

Viết phương trình tiếp tuyến với (C): $y = f(x)$ biết tiếp tuyến **đi qua** điểm $A(x_A; y_A)$



Phương pháp: Ta có thể tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua A và có hệ số góc là k bởi công thức:

$$y - y_A = k(x - x_A) \Leftrightarrow y = k(x - x_A) + y_A \quad (*)$$

Bước 2: Định k để (Δ) tiếp xúc với (C). Ta có:

$$\Delta \text{ tiếp xúc (C)} \Leftrightarrow \text{hệ } \begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \text{ có nghiệm (1)}$$

Bước 3: Giải hệ (1) tìm k. Thay k tìm được vào (*) ta sẽ được pttt cần tìm.

Áp dụng:

Ví dụ 1: Cho đường cong (C): $y = x^3 + 3x^2 + 4$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(0;-1)

Ví dụ 2: Cho đường cong (C): $y = \frac{2x-5}{x-2}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-2;0).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ tại điểm uốn và chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất

Bài 2: Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $y = x - 2$

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ (C)

Tìm trên đồ thị (C) các điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $y = \frac{1}{3}x$

Bài 4: Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Tìm các điểm trên (C) mà tiếp tuyến với (C) tại đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ (C)

Tìm các điểm trên đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại mỗi điểm ấy với đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của (C).

Bài 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (C_m)

Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$

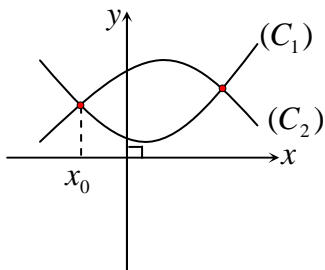
Bài 7: Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm M(2;-7)

4. BÀI TOÁN 4: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Cơ sở của phương pháp:

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (1)
Nghiem x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ giao điểm của $(C_1): y=f(x)$ và $(C_2): y=g(x)$



Dạng 1: Bằng đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$f(x) = m \quad (*)$$

Phương pháp:

Bước 1: Xem (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

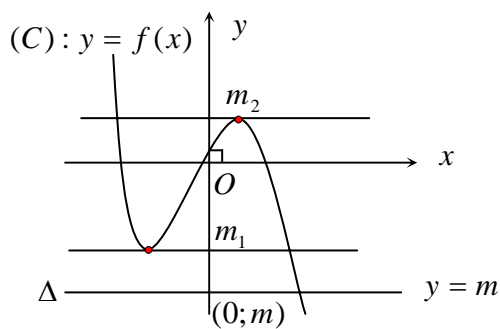
- $(C): y = f(x)$: (C) là đồ thị cố định
- $(\Delta): y = m$: (Δ) là đường thẳng di động cùng phương Ox và cắt Oy tại $M(0;m)$

Bước 2: Vẽ (C) và (Δ) lên cùng một hệ trục tọa độ

Bước 3: Biện luận theo m số giao điểm của (Δ) và (C)

Từ đó suy ra số nghiệm của phương trình (*)

Minh họa:



Dạng 2: Bảng đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$f(x) = g(m) \quad (**)$$

Phương pháp:

Đặt $k=g(m)$

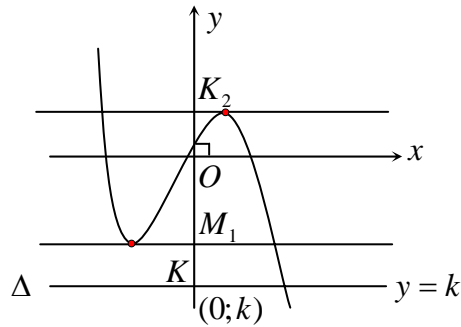
Bước 1: Xem (**) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

- $(C): y = f(x)$: (C) là đồ thị cố định
- $(\Delta): y = k$: (Δ) là đường thẳng di động cùng phương Ox và cắt Oy tại $M(0;k)$

Bước 2: Vẽ (C) và (Δ) lên cùng một hệ trục tọa độ

Bước 3: Biện luận theo k số giao điểm của (Δ) và (C). Dự a vào hệ thức $k=g(m)$ để suy ra m. Từ đó kết luận về số nghiệm của phương trình (**).

Minh họa:



Áp dụng:

Ví dụ: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 - m = 0$

3) Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Biện luận theo m số nghiệm của các phương trình :

a. $\frac{x^2}{x-1} = m$

b. $\frac{x^2}{|x|-1} = m$

Bài 2: Tìm k để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$$

Bài 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$x^3 - 3mx + 2 = 0$$

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$2x^2 - 4x - 3 + 2m|x-1| = 0$$

Bài 5: Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt:

$$|-x^3 + 3x^2 - 2| - \log_2 m = 0$$

Bài 6: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $\frac{e^{3x}}{3} - 2e^{2x} + 3e^x = m$

Bài 7: Tìm a để phương trình sau có nghiệm:

$$9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (a+2).3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2a+1=0$$

5. BÀI TOÁN 5:

HỌ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x, m)$ (m là tham số)

Biện luận theo m số đường cong của họ (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Ta có :

$$\text{Họ đường cong } (C_m) \text{ đi qua điểm } M_0(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m) \quad (1)$$

Xem (1) là phương trình theo ẩn m.

Tùy theo số nghiệm của phương trình (1) ta suy ra số đường cong của họ (C_m) đi qua M_0

Cụ thể:

- Nếu phương trình (1) có n nghiệm phân biệt thì có n đường cong của họ (C_m) đi qua M_0
 - Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì mọi đường cong của họ (C_m) đều không đi qua M_0
 - Nếu phương trình (1) nghiệm đúng với mọi m thì mọi đường cong của họ (C_m) đều đi qua M_0
- Trong trường hợp này ta nói rằng M_0 là điểm cố định của họ đường cong (C_m)

Áp dụng:

Ví dụ: Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = -x + m + 1 - \frac{m^2}{x+m}$. Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua điểm

$A(2;0)$

Ví dụ: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1). Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thuộc đường thẳng $y=x+1$

TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA Họ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x, m)$ (m là tham số)

Tìm điểm cố định của họ đường cong (C_m)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1: Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cố định (nếu có) mà họ (C_m) đi qua. Khi đó phương trình:

$$y_0 = f(x_0, m) \text{ nghiệm đúng } \forall m \quad (1)$$

Bước 2: Biến đổi phương trình (1) về một trong các dạng sau:

$$\text{Dạng 1: } Am + B = 0 \quad \forall m$$

$$\text{Dạng 2: } Am^2 + Bm + C = 0 \quad \forall m$$

$$\text{Áp dụng định lý: } Am + B = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Am^2 + Bm + C = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Bước 3: Giải hệ (2) hoặc (3) ta sẽ tìm được $(x_0; y_0)$

6. BÀI TOÁN 6: TÌM CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$

Tìm trên đồ thị hàm số tất cả những điểm có các toạ độ là nguyên .

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ đó đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ đó đến trục tung .

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

Tìm trên đồ thị hàm số những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

Tìm điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm của hai đường tiệm cận là nhỏ nhất

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$

Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $y + 3x + 6 = 0$ là nhỏ nhất.

Bài 6: Cho hàm số $y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$

Tìm trên đồ thị hàm số điểm M sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng (d): $y = 2x - 1$ là nhỏ nhất.

Bài 7: Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x - 1}$ (C)

Tìm hai điểm A, B trên hai nhánh khác nhau của (C) sao cho độ dài đoạn AB nhỏ nhất

Bài 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

Tìm trên đồ thị hàm số hai điểm đối xứng nhau qua điểm $I(0; \frac{5}{2})$

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x - 1}$

Tìm trên đồ thị hàm số hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x - 1$

7. BÀI TOÁN 7:

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ ĐỐI XỨNG

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ (C). Chứng minh rằng (C) nhận giao điểm hai tiệm cận đứng và xiên làm tâm đối xứng.

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x + 1}$ (C_m)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ (C_m)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4mx + 5m}{x - 2}$ (C_m)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ

-----Hết-----