

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Học sinh làm bài trên tờ giấy thi)

Họ và tên:

Số báo danh:

ĐỀ:

Câu 1: (2 điểm)

Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 + 2}{1 - x^3} - \frac{1}{2(1 + \sqrt{x})} - \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $Q = \frac{1}{(x-1)P}$ có giá trị nguyên.

Câu 2: (2 điểm)

1. Giải phương trình: $3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{2x} - 7$.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 10 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 3: (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$ và điểm A(1 ; - 4). Viết phương trình các đường thẳng đi qua A và tiếp xúc với (P).
2. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = n - 6$$

Câu 4: (3 điểm)

Cho đường tròn (O ; R), có hai đường kính AB và CD không vuông góc và không trùng nhau. Vẽ tiếp tuyến (d) của đường tròn (O) tại B. Các đường thẳng AC, AD lần lượt cắt đường thẳng (d) tại P và Q.

1. Chứng minh tứ giác CPQD nội tiếp được trong đường tròn.
2. Chứng minh trung tuyến AI của tam giác APQ vuông góc với CD.
3. Khi đường tròn (O ; R) và đường kính AB cố định, đường kính CD thay đổi. Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDP. Chứng minh rằng E di động trên một đường thẳng cố định.

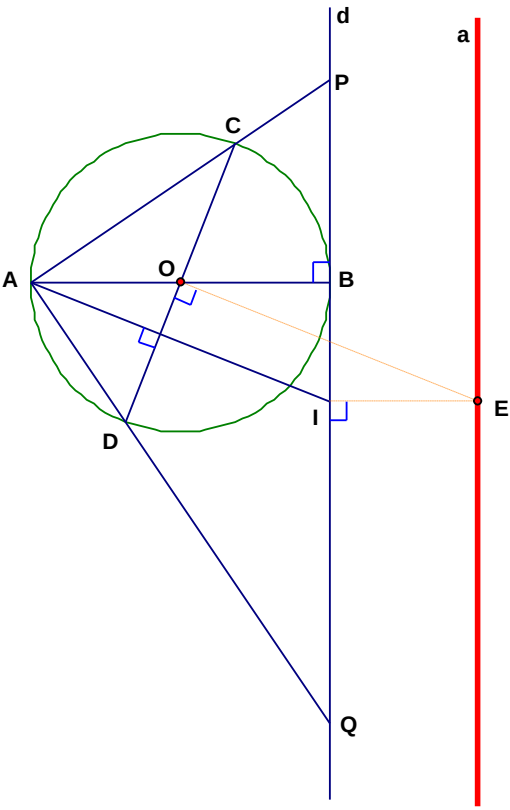
Câu 5: (1 điểm)

Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$. Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	ý	Hướng dẫn giải
1	1	$P = \frac{x^2 + 2}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2(1-x)} \quad (x \geq 0, x \neq 1)$ $= \frac{x^2 + 2 - 1 - x - x^2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{1+x+x^2}$
	2	$Q = \frac{1}{(x-1)P} = \frac{1+x+x^2}{x-1} = x+2 + \frac{3}{x-1}$ $Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-1) \in U(3) \Leftrightarrow x=0; x=2; x=4$
2	1	$3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{2x} - 7 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) - 7$ Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, ta được phương trình: $2t^2 - 3t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3; t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}$ $t = 3 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 6\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{43 \pm 12\sqrt{7}}{4}$
	2	$\Delta' = m^2 - 9$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 3$ hoặc $m < -3$. Theo Viète: $x_1 + x_2 = 2m - 2$; $x_1 x_2 = 10 - 2m$. x_1 và x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $4\sqrt{2}$, ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 32 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 32 = 0$ Ta được phương trình: $m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4$; $m = -3$ (loại)
3	1	Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(1; -4) \Leftrightarrow b = -a - 4$ Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng: $x^2 - 2ax - 2b = 0$ $\Delta' = a^2 + 2b$ Đường thẳng tiếp xúc parabol $\Leftrightarrow a^2 + 2b = 0$ $\Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 4; a_2 = -2$ $a = 4 \Rightarrow b = -8; a = -2 \Rightarrow b = -2$ Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn đề bài: $y = -2x - 2$ và $y = 4x - 8$
	2	$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = n - 6$ $\Leftrightarrow -1 + \sqrt{n+1} = n - 6 \Leftrightarrow n - \sqrt{n+1} - 5 = 0$ Giải phương trình được $n = 8$

4	
1	Chứng minh CPQD là tứ giác nội tiếp: Ta có $\widehat{APQ} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AB} - \text{sđ } \widehat{BC}) = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC}$ và $\widehat{ADC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC}$ $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{APQ} \Rightarrow$ tứ giác CPQD nội tiếp được trong đường tròn (góc ngoài bằng góc đối của góc trong của tứ giác)
2	$\widehat{DAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Vì AI là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông PAQ nên $IA = IQ$. $\Rightarrow \widehat{IAQ} = \widehat{IQA}$, mặt khác $\widehat{ADC} = \widehat{APQ}$ (cmt) Ta có $\widehat{APQ} + \widehat{IQA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IAQ} + \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{AI \perp CD}$
3	Chứng minh rằng E di động trên một đường thẳng cố định: Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDP chính là đường tròn ngoại tiếp tứ giác CPQD. Gọi E là tâm (E là giao điểm của hai đường trung trực của đoạn CD và PQ) Tứ giác AOEI là hình bình hành (cặp cạnh đối song song) suy ra $EI = OA = R$. Vậy khi đường kính CD thay đổi thì E di động trên đường thẳng a song song với d và cách d một khoảng bằng R.
5	$8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - 2 + \frac{1}{4x^2} - 4xy - 2 = 0$ $\Leftrightarrow xy = \frac{1}{4} \left(2x + y \right)^2 + \frac{1}{4} \left(2x - \frac{1}{2x} \right)^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ $\text{Min}(xy) = -\frac{1}{2} \text{ khi } x = \frac{1}{2}; y = -1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}; y = 1$