



Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng và thi học sinh giỏi các cấp thường gặp bài toán chứng minh bất đẳng thức nhiều biến. Bài toán này thường gây khó khăn cho đa số học sinh. Trong phạm vi bài viết chúng tôi giới thiệu phương pháp khảo sát hàm số để chứng minh bất đẳng thức dạng này.

# KHẢO SÁT HÀM SỐ

## ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NHIỀU BIẾN

**Võ Hữu Hà**

(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

### 1. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung phương pháp thể hiện ở kĩ năng xác định hàm số cần khảo sát để giải bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT) dạng:

#### BÀI TOÁN

Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$  thoả mãn  $g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_n) \geq (\leq) n.g(\alpha)$  với số thực  $\alpha \in D$ . Chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf(\alpha).$$

Để giải bài toán này ta cần biểu diễn  $f(a_i)$  qua  $g(a_i), i = 1, 2, \dots, n$ , nên xét hàm số  $h(t) = f(t) - m.g(t), \forall t \in D$ . Số  $m$  được xác định sao cho hàm số  $h(t)$  đạt cực tiểu tại

$$t_0 = \alpha, (h'(\alpha) = 0) \text{ hay } m = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Lưu ý. • Trong bài toán trên ta phải có số  $m$  và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \alpha$ .

• Bài toán dạng: Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$  thoả mãn

$$g(a_1) + g(a_2) + \dots + g(a_n) \leq (\geq) n.g(\alpha),$$

với số thực  $\alpha \in D$ . Chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(\alpha),$$

được giải tương tự bài toán trên. Khi đó hàm số  $h(t)$  đạt cực đại tại  $t_0 = \alpha$  và  $m = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ .

### 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

☞ **Bài toán 1.** Cho  $x, y, z$  là ba số dương thoả mãn  $x + y + z \leq 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

**Phân tích.** Ở đây  $g(t) = t; f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}}$ ;

$n = 3$ . Ta có  $3g(\alpha) = 1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}; m = \frac{f'(\frac{1}{3})}{g'(\frac{1}{3})} = -\frac{40\sqrt{82}}{41}.$$

**Lời giải.** Vì  $x, y, z$  là các số dương và

$x + y + z \leq 1$ , nên  $x, y, z \in (0; 1)$ . Xét hàm số

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} + \frac{40\sqrt{82}}{41}t, \forall t \in (0; 1). \text{ Ta có}$$

$$h'(t) = \frac{t^4 - 1}{t^2\sqrt{t^4 + 1}} + \frac{40\sqrt{82}}{41} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \in (0; 1).$$

$t$	0	1/3	1
$h'(t)$	-	0	+
$h(t)$		↙ $\frac{27\sqrt{82}}{41}$ ↘	

Từ bảng biến thiên, suy ra  $h(t) \geq \frac{27\sqrt{82}}{41}, \forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} \geq -\frac{40\sqrt{82}}{41}t + \frac{27\sqrt{82}}{41}, \forall t \in (0;1).$$

Thay  $t$  lần lượt bởi  $x, y, z$  rồi cộng theo về các BĐT cùng chiều, suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \\ & \geq -\frac{40\sqrt{82}}{41}(x+y+z) + \frac{81\sqrt{82}}{41} \geq \sqrt{82}. \quad \square \end{aligned}$$

**Nhận xét.** Có thể khảo sát hàm số

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} - \frac{40\sqrt{82}}{9.41} \cdot \frac{1}{t}, \forall t \in (0;1), \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \\ & \geq \frac{40\sqrt{82}}{9.41} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{\sqrt{82}}{41} \\ & \geq \frac{40\sqrt{82}}{9.41} \left( \frac{9}{x+y+z} \right) + \frac{\sqrt{82}}{41} \geq \sqrt{82}. \end{aligned}$$

Với cách giải này có thể thay đổi bài toán thành:

Cho  $x, y, z$  là ba số dương thỏa mãn  $xy + yz + zx \geq 9xyz$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

🌟 **Bài toán 2.** Cho  $a, b, c$  là ba số dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+9}{2}.$$

**Phân tích.** Trong bài này  $g(t)=t^2, f(t)=\frac{1}{1-t}$ ,

$$n=3. \text{ Khi đó } 3g(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$m = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{9+6\sqrt{3}}{4}.$$

**Lời giải.** Vì  $a, b, c$  dương và  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , suy ra  $a, b, c \in (0;1)$ . Xét hàm số

$$h(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{9+6\sqrt{3}}{4}t^2, \forall t \in (0;1). \text{ Khi đó}$$

$$h'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{9+6\sqrt{3}}{2}t; \forall t \in (0;1).$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{9+6\sqrt{3}}{2}t$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}t^3 - 6\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - 4 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{6\sqrt{3}-3-\sqrt{36\sqrt{3}-27}}{6\sqrt{3}} \in (0;1);$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0;1);$$

$$\text{và } t_3 = \frac{6\sqrt{3}-3+\sqrt{36\sqrt{3}-27}}{6\sqrt{3}} > 1.$$

$t$	0	$t_1$	$t_2$	1		
$h'(t)$		+	0	-	0	+
$h(t)$	1			$\frac{3}{4}$		

Từ bảng biến thiên, suy ra

$$\frac{1}{1-t} \geq \frac{9+6\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{3}{4}, \forall t \in (0;1).$$

Thay  $t$  lần lượt bởi  $a, b, c$  rồi cộng theo về các BĐT cùng chiều suy ra

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{9+6\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

**Nhận xét.** Với bài toán 2, cả phương pháp hàm lồi và phương pháp tiếp tuyến đều không giải được, đây là điểm mạnh của phương pháp này.

🌟 **Bài toán 3.** Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} + \frac{c}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

**Lời giải.** Đặt  $x = \ln a, y = \ln b, z = \ln c$ . Khi đó  $x, y, z \in \mathbb{R}$  và  $x+y+z=0$ . BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Xét hàm số  $h(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} - \frac{3\sqrt{2}}{8}t$ , với  $t \in \mathbb{R}$

thì  $h'(t) = \frac{e^{2t} + 2e^t}{2\sqrt{(1+e^t)^3}} - \frac{3\sqrt{2}}{8} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

$t$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$h'(t)$	$-$	$0$	$+$
$h(t)$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	

Từ bảng biến thiên suy ra  $h(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{8}t + \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Thay  $t$  bởi  $x, y, z$  rồi cộng các bất đẳng thức cùng chiều, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}} \\ & \geq \frac{3\sqrt{2}}{8}(x+y+z) + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 1. \square$

**✪ Bài toán 4. (USAMO, 2003)**

Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

**Lời giải**

Đặt  $x = \frac{3a}{a+b+c}; y = \frac{3b}{a+b+c}; z = \frac{3c}{a+b+c}.$

Khi đó  $x, y, z$  dương và  $x+y+z=3$  ( $x, y, z \in (0;3)$ ).

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} + \frac{y^2+6y+9}{3y^2-6y+9} + \frac{z^2+6z+9}{3z^2-6z+9} \leq 8.$$

Xét hàm số  $h(t) = \frac{t^2+6t+9}{3t^2-6t+9} - 11t$ , với  $t \in (0;3)$ .

Khi đó  $h'(t) = \frac{-19t^2+16t+3}{(t^2-2t+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \in (0;3) \\ t=-\frac{3}{19} \notin (0;3). \end{cases}$

$t$	$0$	$1$	$3$
$h'(t)$	$+$	$0$	$-$
$h(t)$		$-\frac{25}{3}$	

Từ bảng biến thiên suy ra  $\frac{t^2+6t+9}{3t^2-6t+9} \leq 11t - \frac{25}{3}.$

Thay  $t$  lần lượt bởi  $x, y, z$  rồi cộng theo vế các BĐT cùng chiều, suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} + \frac{y^2+6y+9}{3y^2-6y+9} + \frac{z^2+6z+9}{3z^2-6z+9} \\ & \leq 11(x+y+z) - 25 = 8. \end{aligned}$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1. Giả sử  $x, y$  là các số dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

2. Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

3. Cho  $a, b, c$  là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

4. Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

5. Cho  $a, b, c$  là các số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}.$$

6. Cho  $a, b, c$  là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \geq 1.$$