

NGUYỄN BÁ ĐÔ - HỒ CHÂU

CÁC CÂU CHUYỆN TOÁN HỌC

TẬP HAI

CÁI ĐÃ BIẾT trong CÁI CHƯA BIẾT

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Biên soạn bộ sách này các tác giả không có ý định và cũng không thể mô tả một cách hoàn chỉnh và liên mạch từng vấn đề của toán học, đó là nhiệm vụ của sách giáo khoa. Mục đích của bộ sách này chỉ là kêu gọi sự say mê của bạn đọc để từ đó tìm hiểu thêm về toán học. Trong quá trình từ dạy đến học, từ học đến hiểu, từ hiểu đến dùng và từ dùng đến sáng tạo đòi hỏi mỗi người phải tìm tòi, năng động. Sách giáo khoa chỉ cung cấp những điều cốt yếu, do vậy để hiểu đầy đủ hơn và sâu sắc hơn từng vấn đề, cần đọc những sách bổ khuyết.

Bộ sách này gồm 6 tập :

- *Tất nhiên trong ngẫu nhiên ;*
- *Cái đã biết trong cái chưa biết ;*
- *Khẳng định trong phủ định ;*
- *Hữu hạn trong vô hạn ;*
- *Đại lượng không đổi trong đại lượng biến đổi ;*
- *Hình tượng trong trừu tượng.*

Các tập sách này độc lập với nhau, kể các câu chuyện lí thú về xác suất, phương trình, logic, giới hạn, hàm số, biểu đồ,...

Sách phục vụ học sinh, giáo viên phổ thông và những người yêu thích toán.

Tập thứ hai này mang tên "Cái đã biết trong cái chưa biết" gồm những câu chuyện bổ ích, để bạn đọc hiểu được ý nghĩa sâu sắc của một nhánh toán học : phương trình.

Nhân đây xin cảm ơn tiến sĩ Toán học Nguyễn Huy Doan đã góp ý, chỉnh xác hóa một số nội dung toán học của bản thảo, tiến sĩ Toán học Hà Huy Khoái đã cho những ý kiến bổ ích để hoàn chỉnh bản thảo và kĩ sư Vũ Bội Tuyền đã giúp đỡ chúng tôi khi chuẩn bị bản thảo của tập sách này.

CÁC TÁC GIẢ

1. KHÁM PHÁ BÍ MẬT CỦA "VỤ ÁN CHIẾC VƯƠNG MIỆN"

Ở nơi có kinh tuyến O đi qua, có một vùng rất nổi tiếng nằm giữa ba châu lục, đó là Địa Trung Hải, phía Bắc Địa Trung Hải có một bán đảo hình mũi giày đó là nước Italia. Từ bán đảo này nhìn ra Địa Trung Hải có hòn đảo lớn nhất Địa Trung Hải, đó là đảo Sisilia (Xixin). Thời Cổ Đại, đảo này là một quốc gia, nay thuộc Cộng hòa Italia. Đảo Sisilia có diện tích $25\,700\text{km}^2$, có ngọn núi lửa nổi tiếng Etna cao $3\,263\text{m}$. Chính hòn đảo này là quê hương của các tổ chức mafia. Trên đảo có thành Syracuse (Xiraca) quê hương của một trong các nhà toán học vĩ đại nhất của mọi thời đại và chắc chắn là vĩ đại nhất của thời Cổ Đại, đó là Archimède (Acsimet) (287 – 212 trước Công nguyên).



Archimède

Năm 241 trước Công nguyên, đội quân viễn chinh La Mã đã chiếm đóng toàn bộ đảo Sisilia, sau đó bị đánh đuổi. Đến năm 214 trước Công nguyên, tướng Marcellus của La Mã lại đưa quân chiếm đóng đảo này. Archimède đã có nhiều sáng kiến giúp vua Hieron (Hêrông) bảo vệ thành Syracuse, chống lại quân địch. Ông đã dựa vào các nghiên cứu của mình về đòn bẩy để hướng dẫn chế tạo ra những chiếc máy phóng đá khổng lồ có thể phóng được các tảng đá rất lớn và điều chỉnh để đá lạng xa – gần, các móc cực lớn nhờ

hệ thống ròng rọc kép có thể nâng chìm và nâng tàu thuyền của địch lên cao rồi đập xuống nước cho vỡ tan, hoặc dùng



những chiếc gương quay được trên bản lề để hứng ánh nắng Mặt Trời rồi tập trung hướng về địch phía xa làm tàu thuyền của chúng bốc cháy, ... Với những vũ khí lợi hại này quân địch đã khiếp sợ đến nỗi chúng chỉ trông thấy một sợi dây thừng hay một đoạn gỗ trên tường đã tưởng là Archimède đang quay những chiếc máy về phía mình, la hét thất thanh và bỏ chạy thục mạng. Khi quân La Mã đã hoàn hồn, chúng mới hiểu ra rằng, đây

không phải là sự trừng phạt của Trời - Đất, mà chỉ là trí tuệ của một nhà khoa học. Tướng Marcellus đã kinh hoàng thốt lên : "Chúng ta đang đánh nhau với một nhà toán học !".

Nhà văn Pluytac thời Hi Lạp cổ đại đã viết : "Khi quân La Mã bắt đầu những cuộc tiến công từ trên đất liền cũng như trên biển, nhiều người Syracuse cho rằng khó có thể chống lại được một đội quân hùng mạnh như vậy. Archimède liền cho mở các máy móc và các vũ khí do ông sáng tạo ra. Thế là những tảng đá lớn bay đi với tốc độ nhanh phi thường, phát ra những tiếng động khủng khiếp, tới tấp giáng xuống đầu các đội quân đi bằng đường bộ. Cùng lúc đó có những thanh xà nặng uốn cong giống hình chiếc sừng khổng lồ được phóng từ pháo đài ra, liên tiếp rơi xuống tàu địch, ... Tướng La Mã phải ra lệnh rút lui. Nhưng bọn xâm lược vẫn không thoát khỏi tai họa. Khi các đoàn tàu địch chạy gần đến cách khoảng một mũi tên bay thì ông già Archimède ra lệnh mang đến tám gương sáu mặt, cách tám gương này một khoảng, ông đặt các tám gương khác nhỏ hơn, quay trên các bản lề và điều chỉnh các tám gương hứng các tia sáng của Mặt Trời. Các tia sáng từ gương

chiếu ra đã gây nên những đám cháy khủng khiếp trên các con tàu. Đoàn tàu biến thành đám tro tàn, ...".

... "Marcellus ý lại vào vũ khí nhiều và tối tân, lại cậy mình thông minh, mưu lược, nhưng hấn đã bất lực trước sự chống đỡ của Archimède và những vũ khí đặc biệt của ông, ...".

Với những vũ khí đặc biệt đó, thành Syracuse đã cố thủ được hai năm nhưng cuối cùng, đến mùa thu năm 212 trước Công nguyên, do bị nội phản, quân La Mã đã bất ngờ chiếm được thành trong khi Archimède đang mải mê suy nghĩ về một sơ đồ vẽ trên cát. Khi bóng tên lính La Mã ngã trên hình vẽ của Archimède, ông liền kêu lên : "Không được đụng đến hình tròn của tôi !". Ngay tức thì một mũi kiếm đã xuyên qua ông già tội nghiệp. Ông ngã xuống bên cạnh sơ đồ ở tuổi 75.



Archimède có khả năng tập trung tư tưởng rất cao. Người đời đã kể nhiều chuyện rằng, khi phải suy nghĩ về một vấn đề gì đó thì ông chẳng còn để ý gì đến xung quanh. Câu chuyện điển hình thường được nhắc đến là câu chuyện về "Vụ án chiếc vương miện".

Truyền thuyết kể rằng vua Hieron đã cho thợ kim hoàn làm một chiếc vương miện bằng vàng ròng (vàng nguyên chất) trông đẹp tuyệt vời và nhà vua rất vừa ý. Nhưng trong số cận thần của nhà vua, những ai đã từng dích thân sờ được vương miện đều có cảm giác hết sức kì lạ là hình như nó không phải được làm bằng vàng ròng.

Như mọi người cũng biết, dựa vào cảm giác của bàn tay thì có thể phân biệt nhôm và sắt, vì cùng một thể tích thì sắt nặng hơn nhôm rất nhiều.

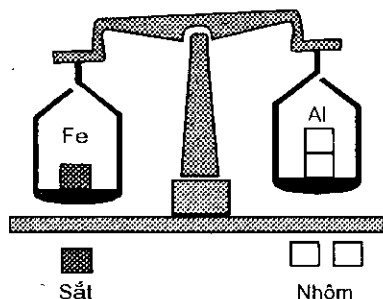
Bảng 1-1 cho tỉ trọng của một số chất thường gặp.

Bảng 1-1

Chất	Tỉ trọng (g/cm^3) ở nhiệt độ bình thường
1. Nước (H_2O)	1,00
2. Nước biển	1,03
3. Gỗ :	
- Tùng	0,6 - 0,8
- Mềm	0,22 - 0,26
4. Dầu hỏa	0,8
5. Xăng	0,899
6. Thủy tinh	2,4 - 2,8
7. Thủy ngân (Hg)	13,6
8. Nhôm (Al)	2,7
9. Sắt (Fe)	7,8
10. Đồng (Cu)	8,9
11. Thiếc (Sn)	13,34
12. Bạc (Ag)	10,5
13. Vàng (Au)	19,3

Từ bảng 1-1 chúng ta thấy, cùng một thể tích như nhau nhưng vàng nặng hơn bạc gần 2 lần, sắt nặng hơn nhôm hơn 2 lần.

Các cận thần thường đã quen với vàng, bạc, do vậy chỉ cần nhắc qua vương miện là họ biết ngay có phải bằng vàng ròng hay không. Nhưng các cận thần lại không dám nói thẳng điều đó với nhà vua, họ sợ bị trảm đầu như chơi, nên họ chỉ bàn tán "sau lưng".



"Cái kim trong bọc lâu ngày rồi cũng tòi ra", lời đàm tiếu "sau lưng" cuối cùng nhà vua cũng biết được. Nhà vua tức lắm, lập tức cho gọi các thợ kim hoàn phân bua : vàng mà bệ hạ đưa cho đã làm vương miện hết, không tin cho cân thử mà xem thì mọi việc sẽ rõ.

Chiếc vương miện đã được cân lên và trọng lượng hoàn toàn bằng số vàng nhà vua đã giao cho họ.

Lúc đó các cận thần hồn vía lên mây, vì nếu thợ kim hoàn thành thực thì các cận thần sẽ bị mất chức, thậm chí phải chém đầu. Cho nên, các cận thần lại tham tấu : "Khó lòng có sự dối chác gì đây, các thợ kim hoàn đã làm đúng trọng lượng !". Nhà vua thấy có lí nhưng vẫn nửa tin nửa ngờ. Thế là vua hạ lệnh trong 3 ngày với điều kiện không được phá hỏng vương miện, phải xác minh sự việc này.

Các cận thần suy nghĩ mãi, không tìm được cách nào. Cuối cùng có người nghĩ ra cách là nhờ đến Archimède vì ông được coi là người thông minh nhất đảo Sisilia lúc đó, là niềm tự hào của mọi người. Archimède xin 1 tuần để suy nghĩ. Đến lúc này ông cũng thấy khó xử. Ông cho rằng, phải phá vương miện để xem xét, nhưng lệnh của nhà vua là không được phá vương miện. Thế thì những điều đã biết trở thành vô ích. Vậy làm sao để có thể tìm cái đã biết trong cái chưa biết đây ? Ông đã phải thức trắng hai đêm nhưng vẫn chưa tìm được cách gì tốt hơn. Vừa lúc đó thì vợ ông khuyên ông nên đi tắm cho người thoải mái.

Trên đường đi đến nhà tắm, Archimède vẫn không sao quên được câu chuyện chiếc vương miện. Một tuần gần trôi qua. Nhưng khi ông bước vào bồn tắm thì nước bắn tung tóe, còn khi ông ngồi vào bồn tắm thì nước tràn ra ngoài. Càng ngập sâu thì ông càng cảm thấy trọng lượng cơ thể càng nhẹ đi, tựa hồ như có một sức lực thần kì nào đó kéo ông lên mặt nước. Bỗng nhiên trong đầu nhà thông thái này lóe lên một tia sáng. Thế là cái nút rối đã được tháo gỡ, hai vật bằng vàng, bằng bạc có trọng



lượng như nhau sẽ có thể tích khác nhau, nếu nhúng trong nước thì bị nước đẩy lên theo hai lực khác nhau, do đó chỉ cần lấy một trọng lượng vàng đúng bằng trọng lượng chiếc vương miện rồi cân cả hai trong nước là có thể xác định được vương miện có bị pha thêm bạc hay không.

Archimède không cầm lòng được, liến nháy ra khỏi bồn tắm với tư thế khỏa thân chạy ra phố, hét toáng lên : "Eureka, eureka !" (Ta đã tìm thấy rồi, ta đã tìm thấy rồi !).

Vậy cái gì đã làm cho Archimède sướng điên lên như vậy ? Thì ra ông đã có được ý tưởng như sau : Có thể đo được thể tích của vương miện bằng cách thả nó vào bể nước, nếu vương miện có chứa bạc (nhẹ hơn vàng) thì thể tích nước tràn ra sẽ nhiều hơn thể tích nước do vương miện chỉ bằng vàng ròng tràn ra.

Từ ý tưởng đó, về sau Archimède đã tiếp tục làm thí nghiệm và tìm ra định luật nổi tiếng mang tên ông (định luật thứ nhất của thủy tĩnh học) :

"Một vật được nhúng trong chất lỏng thì bị chất lỏng đó đẩy lên theo phương thẳng đứng, với một lực đúng bằng trọng lượng của thể tích chất lỏng đã bị vật chiếm chỗ".

Nhưng Archimède đã dựa vào ý tưởng đó để khám phá bí mật về "Vụ án chiếc vương miện" như thế nào ? Trong cuốn "Bàn về kiến trúc" đã nói rõ :

"Thế là Archimède đã thả vương miện vào bồn nước và biết được trọng lượng của nước tràn ra nhiều hơn trọng lượng nước do khối vàng ròng làm tràn ra. Như vậy ông đã biết được vương miện không phải được làm bằng vàng ròng".

Không cần nói thêm thì ai cũng biết là các thợ kim hoàn đã bị trừng phạt đích đáng. Thế nhưng để làm chiếc vương miện này, các thợ kim hoàn đã lấy cấp bao nhiêu vàng ?

Trước lúc trả lời câu hỏi này, chúng ta hãy xem xét một số vấn đề về toán học đã.

2. THẾ GIỚI CỦA CÁC KÍ HIỆU PHÉP TÍNH TOÁN HỌC

Ngày nay, từ lớp Một, học sinh đã biết một số kí hiệu phép tính toán học như cộng (+), trừ (-), bằng nhau (=), ... Nhưng nhân loại đã phải mất hàng nghìn năm mới có được các kí hiệu đơn giản mà cần thiết đó.

Trước khi có các kí hiệu phép tính, người ta đã phải dùng lời, dùng chữ để diễn tả quan hệ số lượng và hình dạng. Ví dụ, để diễn tả $(a + b) - c$ người ta phải viết : "a cộng với b, rồi lấy kết quả trừ đi c". Đây là cách mà người Hi Lạp còn dùng mãi về sau.

Người Ai Cập vào những năm 1700 trước Công nguyên dùng cách đánh dấu bằng hai cạnh chân nằm cùng chiều để chỉ phép cộng và hai cạnh chân nằm ngược chiều để chỉ phép trừ.

Người Hi Lạp cổ đại và người Ấn Độ cổ đại đều coi việc viết hai số liền nhau là phép cộng, ví dụ $3\frac{1}{4}$ có nghĩa là 3 cộng $\frac{1}{4}$ và viết hai số xa nhau là phép trừ, ví dụ $6\frac{1}{5}$ có nghĩa là 6 trừ $\frac{1}{5}$.

Người Hindu thì phép cộng được thể hiện bằng cách ghép, còn phép trừ thể hiện bằng việc đặt một chấm lên số bị trừ.

Nhà toán học Lý Thiện Lan người Trung Hoa đã dùng kí hiệu "⊥" và "T" để chỉ phép cộng và phép trừ.

L.Pasoli (cuối thế kỉ XV) người Italia, đã dùng kí hiệu chữ Latinh p từ chữ plus (nghĩa là cộng) hoặc p thay cho phép cộng, ví dụ 5 p 3, nghĩa là 5 cộng 3 và chữ m, từ chữ minus (nghĩa là trừ) hoặc m thay cho phép trừ, ví dụ 7 m 5, nghĩa là 7 trừ 5.

Cuối thời Trung Cổ, thương nghiệp ở châu Âu khá phát đạt, một số nhà buôn thường vạch dấu "+" và dấu "-" lên thùng hàng để đánh dấu "trọng lượng hơi thừa" và "trọng lượng hơi thiếu".



L. de Vinci

Thời Phục Hưng (thế kỉ XV - thế kỉ XVI), Leonardo de Vinci (Lêônadôda Vinxi) (15.4.1452 - 2.5.1519) người Italia, bậc thầy của nghệ thuật, nhất là hội họa, nhưng rất mê toán, đã dùng kí hiệu "+" và "-" trong một số tác phẩm của mình.

Năm 1489, Johnn Widman (sinh năm 1460 ở Bohemia) người Đức, đã dùng dấu "+" và dấu "-" để chỉ "phần dư" và "phần khuyết".

Cũng năm 1489, trong một cuốn sách số học của J. W. d' Eges người Đức, xuất hiện dấu "+" và dấu "-" để chỉ phép cộng và phép trừ. Sau đó đến

năm 1514, nhà toán học Van der Hoecke người Hà Lan, năm 1524 Christoffel Rudolff (khoảng 1500 - 1545) và năm 1544 Michael Stifel (1486 - 1567) người Đức, đã dùng lại dấu "+" và dấu "-" thay cho phép cộng và phép trừ.

Về sau, nhờ đóng góp tích cực của nhà toán học Francois Viète (1540 - 13.12.1603) người Pháp thì dấu "+" và dấu "-" mới được phổ cập và đến năm 1630 mới được mọi người công nhận. Do vậy ông được coi là ông tổ của kí hiệu toán học.

Hiện nay các ấn phẩm của nhiều nước đều dùng dấu "+" và dấu "-" để chỉ phép cộng và phép trừ.

Cần chú ý là, người châu Âu lục địa đã từ lâu lại dùng dấu "+" để chỉ phép trừ.

Đối với phép nhân, người Hindu đã dùng cách viết bha (âm tiết đầu của từ bhavita là tích) sau các nhân tử. Năm 1631 William Oughtred (1574 - 1660) người Anh, đã dùng dấu "x" trong tác phẩm của mình và người ta đã dùng nó cho đến ngày nay.

Dấu "." thay cho phép nhân đã được Thomas Harriot (1560 - 1621) dùng nhưng sau đó người ta ít dùng, chỉ đến khi (năm 1684) Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646 - 4.11.1716) người Đức chấp nhận nó thì người ta mới dùng nhiều. Hiện nay dấu "." vẫn được dùng cho phép nhân trong sách giáo khoa của một số nước.



G.W. Leibniz

Dấu "∩" được G. W. Leibniz dùng cho phép nhân và ngày nay dấu này được dùng để chỉ phép giao trong lý thuyết tập hợp.

Đối với phép chia, người Hindu thể hiện bằng cách viết số chia dưới số bị chia. Nhà toán học Mohammed Ibn Músá Al - Khowarizmi (khoảng 780 - khoảng 850) người Uđobêkixtan, đã dùng " $\frac{3}{4}$ " hoặc " $\frac{3}{4}$ " để chỉ 3 chia cho 4.

Đến năm 1630, John Pell (1610 - 1685) người Anh đã dùng dấu "÷" và sau đó năm 1659 Johann Heinrich Rahn (1622 - 1676) người Thụy Sĩ, năm 1684 G. W. Leibniz cũng dùng dấu "÷" để chỉ phép chia.

Trong các ấn phẩm của Nga và Đức thì dấu "÷" rất ít thấy để chỉ phép chia, mà lại dùng dấu ":" (so sánh).

Đối với phép khai căn, trước khi có dấu " $\sqrt{\quad}$ " thì người ta dùng R.q thay cho " $\sqrt{\quad}$ ", R.c thay cho " $\sqrt[3]{\quad}$ ".

Người Hindu thể hiện phép khai căn bằng cách viết ka (âm tiết đầu của từ karana là vô tỉ) trước đại lượng lấy căn.

Đến năm 1525, trong cuốn "Die Coss", Ch.Rudolff đã đưa ra dấu " $\sqrt{\quad}$ ". Sở dĩ được ông kí hiệu như vậy vì có lẽ nó giống chữ r trong từ radical là dấu căn.

Tất nhiên là còn nhiều kí hiệu phép tính toán học nữa, như tích phân, vi phân, ...

Sau đây là một ví dụ về các kí hiệu phép tính toán học lấy trong cuốn sách công bố năm 1572 của nhà toán học Raffaello Bombelli (1530 - 1572) :

R.c. L R.q 4352 p 16] m.R.c L R. q. 4352m16]

Diễn đạt theo kí hiệu ngày nay là :

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352} + 16} - \sqrt[3]{\sqrt{4352} - 16}.$$

3. CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC KHÁC

Ở mục 2 chúng ta đã nói về các kí hiệu phép tính toán học, ở mục này ta nói về các kí hiệu toán học khác.

Người nguyên thủy chỉ mới có khái niệm "có" và "không" (không có). Đây là khái niệm cổ nhất về số. Sau đó họ biết thêm hai số 1 và 2, từ 3 trở lên là nhiều. Như vậy họ đã biết khái niệm "ít" và "nhiều".

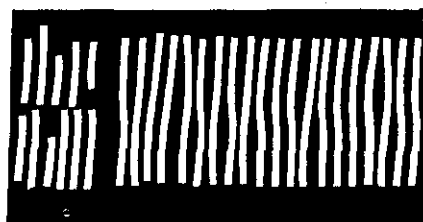
Do sản xuất phát triển, con người có nhu cầu trao đổi nên nảy sinh việc đếm số. Người ta dùng các ngón tay, ngón chân, hòn cuội, rồi khắc lên gỗ cột nhà, thân cây, ... hoặc kết nút trên dây, ... để đếm. Các cách đếm thô sơ này hiện vẫn còn tồn tại, nhất là đối với các dân tộc ít người ở nước ta và các nước.

Đến thời kì Công xã nguyên thủy, con người biết dùng văn tự để ghi lại các số, đó là buổi đầu của số học.

Ở Tây An (Trung Quốc) người ta đã đào được đồ gốm và bảng gốm có ghi 8 hình tròn xếp thành hình một tam giác đều, dùng 100 hình vuông để xếp thành một hình vuông.

Ở Trung Hoa, công cụ tính toán sớm nhất là "thẻ tính". Ban đầu các "thẻ tính" được làm bằng cành cây thẳng, về sau là các thanh gỗ (hoặc tre, xương thú, đá hoặc sắt) nhỏ, thường dài khoảng 13 - 14 cm, bố 271 thanh thành một nắm, có thể

cho vào ống, túi hoặc buộc vào lưng. Các thanh nhỏ được gọi là "thẻ tính toán" hay "thẻ toán". Người ta đã khai quật được nhiều loại "thẻ tính". Ví dụ, khi khai quật ngôi mộ cổ thời Tây Hán (thế kỉ II - thế kỉ I trước Công nguyên) tại huyện Thiên Dương tỉnh Thiểm Tây tháng 8-1971 người ta thấy một loại "thẻ tính"



Hình 3-1

có thanh đường kính khoảng 0,3cm, dài 20cm, có hai màu (hình 3-1) được đặt bên hông xác chết.

"Thẻ tính" được dùng để ghi số, ghi phép tính, tiến hành các phép tính về số, kể cả việc giải các phương trình bậc cao. "Thẻ tính" trên thực tế là một loại thuật toán, nó là công cụ tính toán rất hữu hiệu, đã thúc đẩy cho số học của Trung Hoa phát triển từ thời Cổ Đại đến đời Nguyên (thế kỉ XIV), trước khi xuất hiện bàn tính. Vào thời Xuân Thu, việc dùng "thẻ tính" làm dụng cụ tính toán là phổ biến.

Tác dụng của "thẻ tính" trước hết là để ghi số. Có hai kiểu biểu diễn số : kiểu ngang và kiểu dọc (bảng 3 - 1). Trong thực tế người ta thường dùng hàng đơn vị theo kiểu dọc, sau đó xen kẽ, số 0 được để cách (bỏ trống).

Ví dụ : $||| \equiv ||| = |$ là 330721.

Bảng 3 -1

Hai kiểu biểu diễn số

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kiểu ngang	—	==	===	====	=====	⊥	⊥	⊥	⊥
Kiểu dọc						⊥	⊥	⊥	⊥

Thời Xuân Thu ở Trung Hoa đã có khái niệm số âm, nên người ta dùng thẻ màu đen để chỉ số âm, màu đỏ để chỉ số dương, hoặc thanh có thiết diện chữ nhật là số âm, thiết diện



Zu Chong Zhi

tam giác là số dương, hay đặt xiên thế toán để chỉ số âm (nếu thế cùng màu).

Khi tính toán người ta dùng các bảng gỗ ghi các số và gọi là bảng xếp số, giống như bàn tính sau này.

Phương pháp tính bằng thế được đề cập trong bộ sách "Tồn Tử toán kinh" gồm 3 quyển, viết vào thế kỉ III. Khi dùng "thế tính", nếu người quen dùng thì có thể tính được với tốc độ rất nhanh, đến mức người khác không theo dõi kịp. Nhà toán học vĩ đại Zu Chong Zhi (Tổ Xung Chi) (429 - 500) thời Nam Bắc triều đã dùng phương

pháp "thế tính" (hình 3-2) đã tính được số π nằm giữa số 3,1415926 và số 3,1415927. Điều này có đề cập đến trong cuốn "Tang thuật" (Xuyết thuật) do ông biên soạn. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả tính toán của các nhà toán học phương Tây, nhưng sớm hơn đến 1000 năm !



Hình 3-2

Trong các kí hiệu toán học thì dấu bằng nhau "=" là quan trọng hơn cả. Người

Babylon và người Ai Cập đã dùng nhiều loại kí hiệu để biểu thị sự bằng nhau, nhưng được công nhận sớm nhất là cách của Diophantus : esti và isas, viết tắt là is và i. Thời Trung Cổ kí hiệu để biểu thị sự bằng nhau rất hỗn loạn. Kí hiệu "=" hiện nay đang sử dụng, được dùng lần đầu tiên trong cuốn "Cái kích thích trí thông minh" (The Whetstone of Witte) của Robert Recorde (khoảng 1510 - 1558) công bố năm 1557.

Trong cuốn sách đó, tác giả giải thích rằng, ông đã dùng hai đoạn thẳng song song bằng nhau làm kí hiệu cho một đẳng thức là vì "không có hai vật nào có thể bằng nhau hơn thế".

Nhưng mãi đến thế kỉ XVIII kí hiệu này mới được dùng phổ biến (với hai vạch rất dài).

Dùng chữ để biểu đạt số là một sáng tạo quan trọng, nó càng làm cho lí luận đại số học trở nên sâu sắc hơn. Muốn có được điều này loài người đã phải mất hàng nghìn năm. Công lao này thuộc về nhà toán học F. Viète và ông được xem là người cha của cách dùng chữ thay số trong đại số.

Trong cuốn "In artem" nổi tiếng nhất của F. Viète, ông đã phát triển nhiều kí hiệu đại số. Ông đã dùng nguyên âm để biểu thị các đại lượng chưa biết và các phụ âm để biểu thị các đại lượng đã biết. Còn hiện nay chúng ta lại dùng các chữ cái phía cuối (x, y, z, ...) cho những đại lượng chưa biết và các chữ cái phía đầu (a, b, c, ...) cho những đại lượng đã biết. Đây là công lao của nhà triết học René Descartes (31.3.1596 - 11.1.1650) người Pháp đưa ra năm 1637.

Như các bạn đã biết, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \dots$ là những chữ cái đầu tiên trong văn tự Hi Lạp cổ đại. Trên đầu các chữ cái đó người ta cho thêm một nét ngang để biểu thị một số. Chữ số này tương đương với thứ tự trong bảng chữ cái Hi Lạp. Như $\bar{\alpha}$ có thể thay cho 1, $\bar{\beta}$ thay cho 2, $\bar{\gamma}$ thay cho 3, $\bar{\delta}$ thay cho 4, $\bar{\varepsilon}$ thay cho 5, ...

Thời Hi Lạp cổ đại, vào thế kỉ III, đại số học đã phát triển mạnh, tuy vậy cũng chưa có được một hệ thống kí hiệu đại số hoàn chỉnh. Diophantus (246 - 330) đã sử dụng kí hiệu khá phức tạp để biểu thị số chưa biết :

$$\zeta \rightarrow x$$

$$D^y \rightarrow x^2$$

$$K^y \rightarrow x^3$$

$$\Delta^y \Delta \rightarrow x^4$$

$$\Delta K^y \rightarrow x^5$$

$$K^y K \rightarrow x^6$$

....

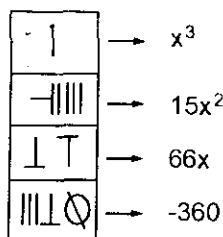
và ông đã dùng "p" để chỉ sự phân cách, M để chỉ là trước số hạng tự do. Ví dụ :

$$K^y K \bar{\alpha} \Delta K^y \bar{\alpha} \uparrow \Delta^y \Delta \bar{\varepsilon} \zeta \bar{\gamma} M \bar{\beta},$$

biểu thị biểu thức đại số sau đây :

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x - 2.$$

Do chưa có một hệ thống kí hiệu toán học đầy đủ mà các nhà toán học thời Cổ Đại ở châu Âu và các nước Ả-rập đã cảm thấy lúng túng đối với một phương trình đơn giản như $ax + b = 0$.



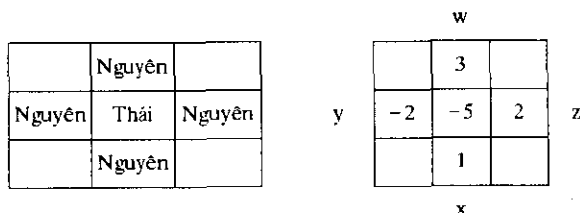
Hình 3-3

Để diễn đạt một phương trình, trong bộ sách "Sách toán chín chương" của Trần Sanh, xuất hiện vào thế kỉ II (thời Đông Hán), người ta gọi số hạng có chứa ẩn số là "nguyên", số hạng tự do (không chứa ẩn số) là "thái". Ví dụ ở hình 3-3 là cách biểu thị phương trình bậc 3 một ẩn :

$$x^3 + 15x^2 + 66x - 360 = 0.$$

Đối với phương trình phức tạp thì vẫn dùng kí hiệu như ở trên nhưng có thay đổi chút ít. Hình 3-4 biểu thị phương trình bậc 1 bốn ẩn.

$$x - 2y + 2z + 3w - 5 = 0.$$



Hình 3-4

Hình 3-5 còn phức tạp hơn, biểu thị phương trình bậc 3 hai ẩn :

$$2y^3 - 8y^2 - xy^2 + 28y + 6xy - x^2 - 2x + \text{thái} = 0.$$

Hình 3-6 biểu thị hệ phương trình bậc 1 ba ẩn :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 26 ; \\ 2x + 3y + z = 24 ; \\ 3x + 2y + z = 39. \end{array} \right\}$$

y	2	-8	28	Thái
	0	-1	6	-2
	0	0	0	-1
	x			

Hình 3-5

1	2	3	(x)
2	3	2	(y)
3	1	1	(z)
26	24	39	

Hình 3-6

Sau đây là niên giám một số kí hiệu toán học :

- Dấu lớn hơn ">", nhỏ hơn "<", khác nhau " $\neq$ ", gần bằng " $\approx$ " do Th.Harriot đưa ra năm 1631.

Cần chú ý là sự khác nhau thì F.Viète lại dùng kí hiệu " $=$ ".

- Vuông góc " $\perp$ " được P.Erigon đưa ra năm 1634.

- Số mũ (lũy thừa) thì F. Viète viết là A quadratum, A cubum, còn các tác giả khác về sau thì viết gọn hơn : Aq , Ac , tức là A^2 , A^3 ; kí hiệu a^2 , a^3 , ... a^n được R. Descartes đưa ra năm 1637 và năm 1656 John Wallis (23.11. 1616 - 28.10.1703) người Anh đưa ra các ý tưởng về các số mũ âm.



J.Wallis

- Dấu ngoặc kép " " do người thợ in Guillaume người Pháp đưa ra năm 1670.

- Dấu song song "//" được G. Oughtred đưa ra năm 1677.

- Dấu đồng dạng " $\sim$ " được G.W. Leibniz đưa ra.

- Hàm số $f(x)$ được Johann Bernouilli (27.7.1667 - 1.1. 1748) người Thụy Sĩ đưa ra năm 1718, viện sĩ Léonard Euler (Ôle) (15.4.1707 - 18.9.1783) người Pháp gốc Thụy Sĩ (nhưng làm việc ở Nga từ năm 1727) đưa ra năm 1734.



Johann Bernoulli



L.Euler



C.F. Gauss

- Dấu đồng nhất, " $\equiv$ " được Carl Friedrich Gauss (30.4.1777 - 23.2.1855) người Đức đưa ra năm 1801.

Dù cho hệ thống kí hiệu phát triển chậm, người ta vẫn phải thừa nhận những cột mốc được dựng lên trên con đường lịch sử phát triển của toán học.

4. BẮC NHỮNG NHỊP CẦU HƯỚNG TỚI NHỮNG ĐIỀU ĐÃ BIẾT

Chúng ta đang sống trong nhiều điều chưa biết. Trí tuệ của loài người đã bắc rất nhiều nhịp cầu để đi từ thế giới của những điều chưa biết sang những điều đã biết. Biết bao phương trình và lời giải của nó là những nhịp cầu như vậy.

Ngày nay người ta đã quen với việc dùng các đại lượng x , y , ... để chỉ những điều chưa biết và dấu " $=$ " để nối hai vế của phương trình. Như vậy ta sẽ có một phương trình gồm các kí hiệu, trong đó có những điều đã biết và những điều chưa biết (ẩn số). Tên gọi phương trình bắt đầu có trong bộ sách "Sách toán chín chương".

Lí thuyết lập và giải phương trình đã được người thời Cổ Đại ở Babilon, Trung Hoa, Ai Cập, ... xây dựng từ hơn 2000 năm trước Công nguyên.

Các bài toán cụ thể và cách giải phương trình bậc 1 :

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad (4-1)$$

đã được một tác phẩm của người Ai Cập đề cập đến vào khoảng năm 1700 năm trước Công nguyên và ngày nay học sinh lớp 3, lớp 4 đã được học. Phương trình (4-1) có 1 nghiệm duy nhất

$$x = -\frac{b}{a} \quad (4-2)$$

Tuy vậy ngày xưa người ta đã tốn rất nhiều công sức và thời gian mới tìm được cách giải.

Đầu tiên, để giải (4-1) người ta phải dùng "phương pháp hai lần thử". Nội dung của phương pháp này như sau : Giả sử g_1 và g_2 là hai giá trị thử của x ; h_1 và h_2 là hai giá trị tương ứng.

Ta có :

$$g_1 a + b = h_1 ; \quad (4-3)$$

$$g_2 a + b = h_2. \quad (4-4)$$

Lấy (4 - 3) trừ (4-4) :

$$a(g_1 - g_2) = h_1 - h_2. \quad (4-5)$$

Nhân hai vế của (4-3) với g_2 và (4-4) với g_1 ta được :

$$g_1 g_2 a + b g_2 = h_1 g_2 ; \quad (4-6)$$

$$g_2 g_1 a + b g_1 = h_2 g_1. \quad (4-7)$$

Lấy (4-6) trừ (4-7) :

$$b(g_2 - g_1) = h_1 g_2 - h_2 g_1. \quad (4-8)$$

Từ (4-8) và (4-5) ta được :

$$a = \frac{h_1 - h_2}{g_1 - g_2} ; \quad b = \frac{h_1 g_2 - h_2 g_1}{g_1 - g_2}. \quad (4-9)$$

Từ (4-9) và (4-1) ta có :

$$x = \frac{h_1 g_2 - h_2 g_1}{h_1 - h_2}. \quad (4-10)$$

Đây là giá trị cần tìm của x .

Cách thử này thấy trong các tác phẩm toán học Ai Cập vào thế kỉ IX với tên là "phép toán Kitay", nghĩa là "phép toán Trung Hoa", từ "phép thừa - thiếu" của người Trung Hoa cổ đại.

Tất nhiên, để giải các bài toán số học ngày nay người ta dùng các kiến thức đại số, không cần dùng "phép thừa - thiếu" nữa.

Thời Cổ Đại ở châu Âu trình độ hình học đã vượt xa trình độ đại số học. Mặc dù có sự cống hiến của Diophantus thời Hi Lạp cổ đại trong lĩnh vực đại số, nhưng sau đó lại không có người kế thừa, vì thế đại số học phương Tây ở thời Trung Cổ đã gần như không phát triển. Mãi đến thế kỉ XVI khi ở châu Âu có những cuộc tranh luận nảy lửa trong giới toán học thì đại số học mới bắt đầu phát triển.

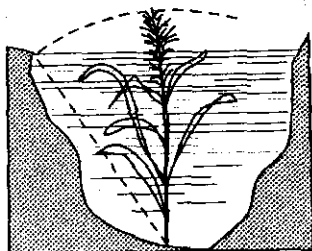
Tình hình ở Trung Hoa thì ngược lại, đại số học thời Trung Cổ lại rất phát triển. Trong bộ sách "Chín chương về nghệ thuật tính toán" xuất hiện khoảng năm 200 trước Công nguyên đã có những ví dụ về cách giải hệ phương trình vô định bậc 1. Trong bộ sách "Sách toán chín chương" đã đề cập đến việc dùng ma trận để giải hệ phương trình vô định, kể cả hệ có chứa các hệ số âm. Trong cuốn "Trương Khâu Kiến toán kinh" sưu tập ở thế kỉ VIII cũng trình bày về phương trình vô định.

Không giống như Diophantus là người đã tìm được mọi nghiệm hữu tỉ của phương trình vô định, người Hindu muốn tìm tất cả các nghiệm nguyên có thể có. Āryabhata (476 - khoảng 550) và Brahmagypta (thế kỉ VII) đã tìm được các nghiệm nguyên của phương trình vô định

$$ax + by = c, \quad (4-11)$$

trong đó a, b, c là các số nguyên.

Trong bộ sách "Sổ thư cửu chương" của Tân Cửu Thiệu xuất bản năm 1247 có một bài toán rất thú vị : Có một cái hồ rộng 1 trượng, một cây lau mọc nhô lên trên mặt nước 1 thước, nếu kéo cây lau này vào bờ thì vừa chạm bờ hồ (hình 4-1).



Hình 4-1

Hỏi nước hồ sâu bao nhiêu ?

Bài toán này đã được truyền sang Trung Á, Ấn Độ, rồi sang châu Âu. Đến thế kỉ III, bài toán này được giải thích trong bộ sách "Tôn Tử toán kinh" bằng phương trình vô định bậc 1. Đến thế kỉ V, Zu Chongzhi đã chỉ rõ cách giải bài toán này bằng phương pháp tìm trị số gần đúng của phân số. Đến thế kỉ XIII (thời Nam Tống) bài toán này được Tân Cửu Thiệu hoàn chỉnh rõ ràng cả về lí luận và cách tính toán, được gọi là "Đại diện cầu nhất thuật" (Giảng giải về phép tính toán).

Năm 1801 nhà toán học kiệt xuất F. Gauss cho ra đời cuốn "Nghiên cứu toán học", trong đó có cách giải các phương trình bất định bậc 1 cả về lý luận và cách tính toán, do vậy người châu Âu gọi đó là "định lý Gauss".

Năm 1876 Madesan người Đức đã chỉ ra rằng, "định lý Gauss" như cách giải của người Trung Hoa trong "bài toán Hàn Tín điểm quân" nên các học giả châu Âu gọi định lý này là "định lý dư Trung Hoa", còn trong sách toán Trung Quốc ngày nay lại gọi là "định lý Tồn Tử".

Phương trình bất định bậc 1 hai ẩn

$$xy = ax + by + c \quad (4-12)$$

đã được người Hindu giải và sau đó L. Euler cũng lại tìm ra cách giải.

5. CÓ MẤY CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Lịch sử phương trình bậc 2 bắt nguồn từ nền văn minh Babilon cổ đại (khoảng 1800 năm trước Công nguyên). Lúc đó họ đã biết cách giải tất cả các phương trình bậc 2 nhưng không diễn đạt trong tập hợp số thực.

Vào khoảng năm 1500 trước Công nguyên, trong một tác phẩm của người Ai Cập về các bài toán cụ thể đã có những ví dụ về giải phương trình bậc 2.

Trường phái Pythagores (thế kỉ VI trước Công nguyên) đã giải phương trình bậc 2 bằng hình học và về sau người ta gọi là phương pháp Pythagores.

Ở thế kỉ III trước Công nguyên, người Hi Lạp cổ đại đã biến việc giải phương trình bậc 2 thành cơ sở cho toàn bộ hình học của họ và để có thể làm việc trong tập hợp số thực, họ đã thay thế các tính toán của người Babilon bằng các phép dựng

hình bằng thước thẳng và compa. Tuy vậy họ chỉ tính toán tập hợp số hữu tỉ dương, cho nên có nhiều phương trình bậc 2 họ không giải được. Phải chờ đến thế kỉ XVI, khi xuất hiện số phức thì mới giải được tất cả các phương trình bậc 2.

Ở Trung Hoa cổ đại, cách giải phương trình bậc 2 cũng được trình bày trong bộ sách "Sách toán chín chương", trong cuốn "Trương Khâu Kiện toán kinh" và trong cuốn "Số thư cừu chương".

Người Hindu thừa nhận một phương trình bậc 2 có lời giải thực thì có hai nghiệm hình thức. Họ thống nhất phép giải đại số các phương trình bậc 2 bằng phương pháp bổ sung bình phương quen thuộc, do vậy ngày nay phương pháp này thường được gọi là phương pháp Hindu.

Như vậy ở thời Cổ Đại người Babilon, người Ai Cập, người Hi Lạp, người Trung Hoa, ... đã biết cách giải phương trình bậc 2 nhưng công thức nghiệm thì mãi đến năm 825 nhà toán học Al- Khowarizmi mới lập được. Ông đã giải phương trình bậc 2 bằng đại số và hình học. Ông viết :

$$x^2 + px + q = 0 \quad (5-1)$$

thành

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \quad (5-2)$$

Từ (5-2) ông đã tìm được nghiệm

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (5-3)$$

Về sau ông lại giải theo cách khác. Ông đặt

$$z = \left(x + \frac{p}{2}\right). \quad (5-4)$$

Thay (5-4) vào (5-1) được :

$$z^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0 \quad (5-5)$$

Việc giải (5-5) trở thành đơn giản.

Trong chương trình đại số lớp 9 đã có công thức tính nghiệm của phương trình bậc 2 dạng chính tắc (đầy đủ hay hoàn chỉnh) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (5-6)$$

bằng cách đặt $\Delta = b^2 - 4ac.$ (5-7)

Nếu $\Delta < 0$ thì (5-6) vô nghiệm .

Nếu $\Delta = 0$ thì (5-6) có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad (5-8)$$

Nếu $\Delta > 0$ thì (5-6) có hai nghiệm phân biệt :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} . \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

Francois Viète (1540 - 13.12.1603) người Pháp đã đưa ra hệ thức của hai nghiệm này :

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = -p ; \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} = q . \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$



F. Viète

Hệ thức (5-10) về sau được mang tên ông (hệ thức Viète) và được đưa vào chương trình đại số lớp 9.

Ngoài ra còn các cách giải phương trình bậc 2 bằng hình học sau đây :

- Cách của Sir John Leslie (1766 - 1832) người Anh trong cuốn "Các cơ sở của hình học".

- Cách của Thomas Carlyle (1795 - 1881) người Anh, học trò của S.J. Leslie.

- Cách của Karl George Christian von Staudt (1798 - 1867) người Đức.

Phương trình vô định bậc 2 hai ẩn

$$y^2 = ax^2 + 1, (5-11)$$

trong đó a là số nguyên dương không chính phương, đã được Brahmagupta và Bhaskara (1114 - 1185) người Ấn Độ giải. Người ta thường gọi (5-11) là phương trình Pell (J.Pell). Lí thuyết đầy đủ về phương trình (5-11) được

Joseph - Louis Lagrange (25.1.1736 - 10.4.1813) người Pháp hoàn tất vào 1766 - 1769.



J.-L. Lagrange

6. CUỘC THÁCH ĐỐ CHẤN ĐỘNG GIỚI TOÁN HỌC

Như chúng ta đã biết, việc tìm lời giải cho phương trình bậc 3 là khá phức tạp và công thức của nghiệm là khá cồng kềnh.

Trong một bản Babilon^(*) tìm thấy có các giá trị của $n^3 + n^2$ với $n = 1$ đến $n = 30$ và như vậy chúng ta cũng tìm được nghiệm của 30 phương trình bậc 3 đặc biệt. Nhà toán học O. Neugebauer (sinh 1899) tin rằng người Babilon hoàn toàn có thể quy một phương trình bậc 3 tổng quát về dạng "chuẩn" $x^3 + x^2 = c$.

Ở Trung Hoa, bộ sách "Chức cổ toán kinh" của Vương Hiến Chương viết vào đầu đời Đường (thế kỉ VII) có nêu cách giải

(*) Xem mục 12.

phương trình bậc 3 tổng quát bằng đại số. Trong bộ sách "Số thập cửu chương" Tấn Cửu Thiệu cũng đưa ra phương trình bậc 3. Nhưng sau đó, người Trung Hoa đã quá chú ý đến phương pháp đại số trên bàn tính, mà ít chú ý sử dụng các kí hiệu đại số như đang dùng, do vậy từ thế kỉ VII nền toán học Trung Hoa bắt đầu lạc hậu so với phương Tây.

Omar Khayyam (16.5.1048 - 4.12.1122) ở Khorâsân đã giải phương trình bậc 3 bằng hình học một cách độc đáo.

Sau Al-Khowarizmi đã có nhiều nhà toán học đi tìm cách giải phương trình bậc 3 một cách miệt mài. Nhưng trải qua suốt 7 thế kỉ, ngoài việc tìm được cách giải của những phương trình khác thì không có bước tiến nào cho việc giải phương trình bậc 3. Vì vậy đã có người tỏ ra chán nản, cho rằng phương trình bậc 3 có thể không có thực. Nhưng giáo sư Scippione del Ferro (Phêro) (1465 - 1526) người Italia, ở Trường đại học Tổng hợp Bologna thì không như vậy. Ông vẫn tiếp tục con đường của mình là để tâm miệt mài nghiên cứu vấn đề hóc búa lúc bấy giờ là giải phương trình bậc 3. Trời đã không phụ ông, vào một ngày "không thể tin được", ông đã tìm ra bước đột phá và đến năm 1505 ông tuyên bố đã tìm ra cách đặc biệt để giải phương trình

$$x^3 + mx = n, \quad (6-1)$$

với $m, n > 0$.

Vào thời đó, mọi người đều giữ bí mật cách giải của mình, vì vậy việc S. del Ferro giữ kín bảo bối của mình cũng là điều không có gì lạ. Nhưng đáng tiếc là, ông đã không có dịp nào để công bố thành tựu của mình. Mãi đến khi sắp qua đời, ông mới để lại bí mật này cho người con rể tin cẩn là Anabel Nova. Nhưng về sau, một môn sinh của S. del Ferro là Antonio Fior (Phiorê) đã lấy cắp được bảo bối của ông.

Trong trường phái Italia thì N. Fontana (khoảng 1500 - 1557) cũng đi tiên phong trong việc tìm cách giải phương trình bậc 3.

Bây giờ lại nói đến một nhà toán học khác, đó là Niccolo Tartaglia (1499 - 1557). Thời thơ ấu của ông trôi qua thật nặng nề. Ông sinh ra ở Brescia miền Bắc Italia nên được gọi là Niccolo của Brescia và thường được gọi là Tartagli (người nói lắp), vì lúc nhỏ ông bị quân Pháp dã man làm hại. Câu chuyện thương tâm kể lại rằng, lúc ông 13 tuổi thì quân Pháp tràn vào Brescia. Ông cùng với người cha (lúc đó là người đưa thư) và dân chúng chạy trốn vào ngôi nhà thờ để tìm nơi ẩn náu nhưng quân lính Pháp đã rượt theo và thảm họa đã xảy ra : Người cha bị chết, còn cậu bé bị chém vào hàm và miệng. Lúc sau người mẹ tìm thấy cậu con trai còn sống, vội mang đi. Không có tiền lo thuốc thang điều trị vết thương cho con, bà đã nhớ lại là khi con chó bị thương nó thường liếm vào vết thương và thế là với cách chữa này mà N.Tartaglia đã bình phục. Vết thương ở vòm miệng đã làm ông suốt đời nói năng thật khó khăn. Rồi người mẹ lại qua đời. Ông phải tự đi tìm đường sống cho mình. Ông có tư chất thông minh, lại ham học. Ông học vật lí, toán học và tỏ rõ tài năng rất sớm. N. Tartaglia tự học thành tài, được nhiều người thời đó kính phục.

Vào năm 1530 một nhà toán học đã đưa ra cho ông hai câu hỏi mang tính thách thức, nhằm hạ uy tín của ông :

1. Tìm một số mà lập phương cùng với 3 lần bình phương thì bằng 5 ;

2. Tìm ba số mà trong đó số thứ hai lớn hơn số thứ nhất là 2, số thứ ba lớn hơn số thứ hai là 2 và tích của chúng là 1000.

Đây thực chất là tìm nghiệm của phương trình bậc 3. Với câu hỏi 1 phương trình sẽ là :

$$x^3 + 3x^2 - 5 = 0$$

và câu hỏi 2 :

$$x^3 + 6x^2 + 8x - 1000 = 0.$$

Ông đã tìm được nghiệm của cả hai phương trình bậc 3 này và vì vậy ông càng nổi tiếng.

Các môn sinh của S. del Ferro cũng tuyên bố giải được phương trình bậc 3. Không ai chịu ai, nên cuối cùng các nhà

toán học Italia quyết định mở một cuộc thách đố giữa hai bên, mỗi bên đưa ra 30 đề toán làm trong 2 giờ.

Sắp đến ngày thi, N. Tartaglia cảm thấy nao núng, vì ông chỉ là người tự học, sợ không bảo vệ được cách giải của mình. Ông suy nghĩ rất nhiều và đưa ra nhiều phương án khác nhau. Trước khi thi 8 ngày, ông đã tìm được phương pháp mới để giải phương trình bậc 3.

Ông học thuộc cách giải mới và nghĩ ra 30 đề toán mà chỉ có cách giải mới này thực hiện được.

Vào ngày 22-2-1535, các nhà toán học và những người hâm mộ của Italia và nhiều nước châu Âu kéo về thành phố Milan để dự cuộc thi tài. Cả hội trường vô cùng náo nhiệt, mọi người nóng lòng chờ đợi giờ phút thi đấu. Bắt đầu cuộc thi, người ta thấy một người trẻ tuổi, đi khắp khiêng, lại nói lắp nhưng có đôi mắt sáng, đó là N.Tartaglia giáo viên toán ở Brescia. Ba chục đề toán mà mỗi bên đưa ra đều là phương trình bậc 3. Người ta thấy N.Tartaglia rất bình tĩnh, tự tin. Ông đã giải xong 30 đề toán đối phương đưa ra trước giờ quy định. Ngược lại, nhóm môn sinh của S.del Ferro đã không giải được bài nào trong 30 đề toán mà ông đưa ra. Như vậy cuộc thi kết thúc với tỉ số 0 : 30, phần thắng tuyệt đối thuộc về N.Tartaglia.

Tin tức được truyền đi, làm chấn động cả giới toán học. Ở thành phố Milan, có một người đứng ngồi không yên, đó là Girolamo Cardano (24.9.1501 - 21.9.1576). Ông không chỉ là thầy thuốc nổi tiếng khắp châu Âu, mà còn là một nhà toán học tài ba, dạy toán và có nhiều công trình nghiên cứu về toán học. Ông chuyên tâm nghiên cứu phương trình bậc 3, nhưng chưa có kết quả. Cho nên khi nghe tin N.Tartaglia đã giải được phương



Gi. Cardano

trình bậc 3, ông hi vọng rằng sẽ được hưởng một phần thành tựu của N.Tartaglia.

Lúc này N.Tartaglia đã nổi tiếng khắp châu Âu, nhưng ông lại không muốn công bố rộng rãi công trình của mình. Ông chỉ viết lại trong tác phẩm "Nguyên tắc hình học", cho nên trong tủ sách của nhiều người khó lòng có được tác phẩm của N.Tartaglia.

G.Cardano hành nghề y nhưng rất quan tâm đến toán học. Với thái độ chân tình, hiếu học, sau nhiều lần G.Cardano đề nghị, năm 1539 N.Tartaglia đã đồng ý truyền lại những bí quyết cho G.Cardano. Nhưng G.Cardano đã không tôn trọng lời hứa, năm 1545 đã giới thiệu cách giải phương trình bậc 3 với lời giải thích của mình trong cuốn "Ars magna". G.Cardano viết :

"Khoảng 30 năm trước, S. del Ferro đã tìm được phương pháp giải này, đã truyền lại cho người khác và đã từng tranh luận với N.Tartaglia, N. Tartaglia cũng phát hiện được phương pháp này. Tôi đã nhiều lần đề nghị thiết tha và cuối cùng N.Tartaglia đã truyền đạt cho tôi phương pháp giải nhưng lại không chỉ cho tôi phương pháp chứng minh, vì vậy buộc tôi phải tìm ra nhiều cách chứng minh. Vì nó rất khó, tôi xin mô tả nó như sau : ...".

Sau đó cuộc tranh cãi về bản quyền cách giải này đã nổ ra gay gắt nhưng cuối cùng lẽ phải đã chiến thắng và người ta công nhận lời giải đó là của N.Tartaglia. Tuy vậy, G. Cardano vẫn nổi tiếng nhờ công bố cách giải này.

Về sau G. Cardano còn đưa ra cách giải khác. Đặt

$$x = u + v. \quad (6-2)$$

Thay (6-2) vào (6-1) được :

$$u^3 + v^3 + (3uv + m)(u + v) + n = 0. \quad (6-3)$$

Việc giải (6-3) tương đương với việc giải hệ phương trình

$$\left. \begin{aligned} 3uv + m &= 0; \\ u^3 + v^3 + n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

$$\text{hoặc} \quad \omega^2 + n\omega - \frac{m^3}{27} = 0. \quad (6-5)$$

Trong một cuốn sách của Trung Quốc lại nói rằng, sau 2 năm G. Cardano công bố cách giải phương trình bậc 3 thì trong bài "Những câu hỏi và phát minh". N.Tartaglia đã phê phán thái độ thiếu trung thực của G. Cardano và yêu cầu thành phố Milan tổ chức tranh luận công khai với G. Cardano. Đến ngày gặp nhau để tranh luận thì không phải là G. Cardano mà lại là một học trò tài ba của G. Cardano, được ông rất ưu ái, đó là Lodovico Ferrari (1522 - 1565). L.Ferrari không những nắm được cách giải phương trình bậc 3, mà còn giải được phương trình bậc 4 nên N.Tartaglia đã chịu thất bại. Từ đó N.Tartaglia như bị vết thương lòng và ôm hận đến lúc chết.

Trong cuốn "Lịch sử toán học" của Howard Eves người Mỹ xuất bản năm 1969 lại viết : "... những lời phản đối mãnh liệt của N.Tartaglia đến tai L. Ferrari nên người này đã lập luận cho thấy của mình rằng, G. Cardano có được thông tin cần cho mình từ S.del Ferro qua một người thứ ba và lên án N. Tartaglia là ăn cắp ý tứ cùng một nguồn đó ...".

Cho dù các lời đồn thổi như thế nào nhưng cuối cùng lời giải được lưu truyền đến ngày nay với tên gọi chung là công thức Cardano - Tartaglia :

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad (6-6)$$

Cũng cần nói thêm rằng, (6-6) là công thức nghiệm của phương trình bậc 3 chưa đầy đủ (6-1). Tuy nhiên, từ phương trình bậc 3 đầy đủ (chỉnh tắc hay hoàn chỉnh) :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (6-7)$$

đến phương trình (6-1) chỉ cần đặt

$$y = x + \frac{b}{3a} \quad (6-8)$$

Năm 1572, R.Bombelli cho công bố một cuốn sách đại số góp phần đáng kể vào việc giải phương trình bậc 3. Trong các sách giáo khoa về lý thuyết các phương trình cho biết rằng, nếu

$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ là âm thì phương trình (6-1) có ba nghiệm thực.

Nhưng trong trường hợp này, theo công thức (6-6), các nghiệm đó được biểu thị bằng hiệu của hai căn bậc 3 của các số phức liên hợp. Điều tưởng chừng bất thường này gọi là "trường hợp bất khả quy của phương trình bậc 3" đã làm bận tâm đáng kể các nhà đại số học thời xưa. R. Bombelli đã chỉ ra tính thực của các nghiệm thoát nhìn là không thực trong trường hợp bất khả quy.

Trong cuốn "Canon mathematicus seu ad triangula" của F. Viète xuất bản năm 1579, tác giả có gợi ý một cách giải bằng lượng giác cho trường hợp bất khả quy của các phương trình bậc 3. Trong luận văn của F. Viète thấy có cách giải rất đẹp sau đây cho phương trình bậc 3 :

$$x^3 + 3ax = 2b. \quad (6-9)$$

Phương trình (6-9) là một dạng mà phương trình bậc 3 nào cũng có thể quy về được. Nếu đặt

$$x = \frac{a}{y} - y \quad (6-10)$$

thì (6-9) trở thành

$$y^6 + 2by^3 = a^3. \quad (6-11)$$

Phương trình (6-11) là phương trình bậc 2 của y^3 . Ta có thể tìm y^3 , rồi y , sau đó là x .

Về phương trình (6-9) thì Isaac Newton (25.12.1642 - 20.3.1727) cũng có cách giải.



I. Newton

7. NHỮNG VINH QUANG SAU KHI ĐÃ QUA ĐỜI

Ở châu Âu đến thế kỉ XVI khoa học tự nhiên đã phát triển rất nhanh chóng. Truyền thuyết tôn giáo cho rằng, Thượng Đế sinh ra thế giới và Trái Đất có hình vuông. Những phát kiến về địa lí của Christophe Colomb (1451 - 20.5.1506), Fernand de Magellan (1480 - 1521) và những người khác đã chứng minh đầy đủ rằng, Trái Đất có hình cầu, đó là điều không thể chối cãi được. Phát minh về vật lí của G.Galilei đã đem lại cho nhân loại những nhận thức mới về vũ trụ. Toán học được suy tôn là "nữ hoàng" của khoa học tự nhiên. Từ thế kỉ XVI đến thế kỉ XVIII, đã xuất hiện hàng loạt nhà toán học kiệt xuất, họ đã đưa nền toán học lên một đỉnh cao mới. Sự xuất hiện phương pháp tọa độ, ứng dụng của số phức, sáng tạo ra vi - tích phân, ... đã kết hợp nghiên cứu thế giới khách quan trong trạng thái tĩnh và động. Vào thời gian đó, cả châu Âu gần như đã bỏ lại đằng sau sự trì trệ của thời Trung Cổ. Trong tiến trình phát triển đó, toán học luôn đi tiên phong.

Nhưng ở nhánh phương trình đại số thì tình hình lại không hoàn toàn như vậy. Như ở mục 6 đã nói, do cuộc thách đố chấn động cả giới toán học vào đầu thế kỉ XVI nên người ta đã tìm được cách giải phương trình bậc 3, bậc 4. Từ giữa thế kỉ XVI trở đi, người ta bắt đầu đi sâu nghiên cứu phương trình bậc 5. Các nhà toán học đã phân tích tỉ mỉ cách giải phương trình từ bậc 2 đến bậc 4. Nếu một phương trình có nghiệm viết được bằng công thức đại số của các hệ số thì được gọi là phương trình giải được bằng căn thức. Trước thời R.Bombelli và F. Viète người ta đã xác định được công thức tổng quát để tính nghiệm của phương trình từ bậc 1 đến bậc 4.

Không bao lâu, sau khi giải được phương trình bậc 3 thì phương trình bậc 4 tổng quát cũng có cách giải đại số. Việc giải phương trình bậc 4 tổng quát quy về việc giải một phương trình bậc 3 liên kết.

Năm 1540, Zuanne de Tonini đã Cõi người Italia đã đề nghị G. Cardano giải bài toán dẫn đến phương trình bậc 4 nhưng G. Cardano không giải được, mà học trò là L.Ferrari lại giải được và sau đó G. Cardano đã công bố cách giải này trong cuốn "Ars magna" của ông.

Cách giải của L.Ferrari viết gọn theo cách kí hiệu hiện nay như sau : Biến đổi đơn giản sẽ quy một phương trình bậc 4 chính tắc (đầy đủ) về dạng

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (7-1)$$

Từ (7-1) biến đổi được :

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2, \quad (7-2)$$

hoặc :

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r. \quad (7-3)$$

Với y bất kì, từ (7-3) ta có :

$$\begin{aligned} (x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx + p^2 - r + 2y(x^2 + p) + y^2 \\ &= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2). \end{aligned} \quad (7-4)$$

Bây giờ ta chọn y để vế phải của (7-4) là một bình phương. Đây là trường hợp khi

$$4(p + 2y)(p - r - 2py + y) - q = 0. \quad (7-5)$$

Phương trình (7-5) là phương trình bậc 3 của y đã có các cách giải như đã nói ở mục 6. Một giá trị của y như vậy sẽ quy phương trình bậc 4 lúc đầu về việc chỉ phải lấy các căn bậc 2.

Một cách khác bằng đại số giải phương trình bậc 4 được F. Viète đề xuất và một cách nữa được R.Descartes đưa ra năm 1637, nhưng trong nhiều sách giáo khoa đại học đã có thì cách giải của F. Viète cũng giống như cách giải của L.Ferrari.

Nhà toán học Vanmec người Tây Ban Nha cũng đã giải được phương trình bậc 4 nhưng tên bạo chúa Tuocmacvada đã thiêu chết ông, vì theo hán, ông đã làm trái ý Trời : phương trình bậc 4 không hợp với khả năng của người trần tục - đó là ý muốn của Trời !

Vì việc giải phương trình bậc 4 tổng quát được thực hiện tùy thuộc vào việc giải một phương trình bậc 3 liên kết, nên năm 1750 L.Euler đã cố gắng làm điều tương tự là quy việc giải phương trình bậc 5 tổng quát về phép giải phương trình bậc 4 liên kết nhưng đã thất bại.

Rất nhiều nhà toán học cũng đã vắt óc tìm kiếm cách giải phương trình bậc 5 nhưng không đi đến kết quả. Trước tình hình đó, người ta bắt đầu hoài nghi là liệu có tồn tại hay không một công thức tính nghiệm của phương trình bậc 5 tổng quát !

Năm 1778, nhà toán học J. L.Lagrange đã mở được một đầu mối quan trọng. Ông đã tập trung tìm kiếm công thức chung để giải các phương trình từ bậc 2 đến bậc 4, vì ông cho rằng, nếu tìm được công thức chung đó thì sẽ suy luận để tìm được cách giải phương trình bậc 5. Nhưng cuối cùng ông đã phát hiện thấy nghiệm của một phương trình đã biết có thể được biểu thị bằng một hàm số đối xứng của một phương trình hỗ trợ khác. Phương trình hỗ trợ này được ông gọi là cách giải dự kiến. Dùng cách giải dự kiến này, ông đã sử dụng để giải được phương trình bậc 3, bậc 4 nhưng khi đến phương trình bậc 5 thì ông đành chịu. Một tia sáng lại lóe trong đầu ông : công thức như vậy là không thể tồn tại được, nhưng ông lại không thể chứng minh được điều này.

Phương pháp tổng quát biến đổi một phương trình đa thức bậc n đối với x thành một phương trình bậc n đối với y , trong đó các hệ số của y^{n-1}, y^{n-2} đều bằng 0 được E.W. von Tschirnhausen (1651 - 1708) đưa ra. Về sau phép biến đổi phương trình bậc 5 như vậy, trong đó các hệ số của y^4, y^3, y^2 đều bằng 0 đã được E.S. Brings (1736 - 1798) đưa ra năm 1786. Điều này đóng vai trò quan trọng trong việc giải phương trình bậc 5 bằng các hàm elliptic. Năm 1834, G.B. Jerrard (mất 1863) lại chứng minh được hệ số của y^{n-3} cũng bằng 0.

Trong các năm 1803, 1805, 1813, nhà vật lí Paolo Ruffini (1765 - 1822) người Italia đã đưa ra một cách chứng minh về một điều mà lúc bấy giờ được coi là một sự kiện, đó là nghiệm của phương trình tổng quát bậc 5 hoặc bậc cao hơn đều không

thể biểu thị được bằng các căn thức theo các hệ số của phương trình đó.

Loài người đứng trước sự thách thức về trí tuệ hết đời này đến đời khác, cho đến khi xuất hiện nhà toán học trẻ tuổi Niels Henrik Abel (5.8.1802 - 6.4.1829) người Na Uy. Ông là người rất can đảm. Ngay từ thuở nhỏ, ông đã bắt đầu tìm lời giải cho phương trình bậc 5. Nhờ quyết tâm chiến thắng đến cùng, cho nên vào năm 1824 (lúc ông 22 tuổi), ông đã chứng minh được một cách tổng quát rằng, phương trình bậc từ 5 trở lên là không thể có cách giải kiểu căn thức. Với trí tuệ của tuổi trẻ, ông đã tuyên bố với thế giới một chân lí : trí tuệ của con người là bất khả chiến thắng.



N.H.Abel

Nhưng con đường thành công của N.H.Abel hết sức gập gềnh, khúc khuỷu. Tuy có những thành công trong thời gian ngắn ngủi, nhưng những gì là đau khổ còn nặng nề hơn. Những vinh quang của ông hầu hết đến sau khi ông đã qua đời.

Ông sinh ra trong một gia đình mục sư ở nông thôn. Cha mẹ của ông lại đông con và nghèo. Trong số 7 anh chị em, ông là người anh thứ 2. Lúc nhỏ ông bị ốm nhưng không có tiền để chữa bệnh. Năm 13 tuổi, ông được đưa vào học trong trường dòng. Ngay từ đầu ông đã rất hứng thú với toán học. Năm 1817, trong trường đã xảy ra một sự kiện đặc biệt, trong một đêm đã thay đổi cả cuộc đời ông. Thấy dạy toán của ông, do đã ngược đãi học trò nên đã bị sa thải. Thay thầy giáo cũ là thầy Holmboë (sinh 1795) mới 22 tuổi. Thầy Holmboë đã nhanh chóng phát hiện tài năng toán học của N.H. Abel. Lúc đầu thầy Holmboë đưa cho N.H.Abel một số sách tham khảo, tự học. Sau đó Holmboë lại hợp tác nghiên cứu với N. H. Abel. Khi N.H.Abel nêu ra quyết tâm tấn công vào phương trình bậc 5 thì nhiều

người cười chế riếu, cho rằng :Ếch nhái làm sao lại đòi ăn thịt thiên nga". Vậy mà Holmboe lại rất ủng hộ N. H. Abel, động viên ông cố gắng vươn lên.

Năm 1821, N. H. Abel thi đậu vào trường đại học. Để thực hiện ý tưởng của mình, ông theo học thầy C.F. Gauss. Ban đầu ông học theo cách của những người đi trước, đi tìm cách giải đáp một cách chính diện. Sau nhiều ngày tháng miệt mài, năm 1824 ông đã chứng minh là phương trình tổng quát bậc 5 không thể có công thức tính nghiệm bằng căn thức.

Điều làm bận tâm buộc loài người phải suy nghĩ suốt 2 thế kỉ, cuối cùng đã được một thanh niên không có tiếng tăm giải quyết. Tuy nhiên, điều N. H. Abel nêu ra đã không được các tạp chí toán học đăng tải, buộc ông phải tự bỏ tiền ra in ấn. Nhưng những đau khổ của ông không vì thế mà giảm bớt.

Năm 1825, N. H. Abel đến nhiều nước châu Âu và đã gõ cửa nhiều nơi nhưng không ở đâu coi ông ra gì cả, kể cả những nơi được gọi là "vương quốc toán học". Cuối cùng ông đến Berlin. Rất may mắn, ở đây ông đã được kĩ sư Klaye hiểu được ý tưởng của ông. Tuy Klaye không hiểu hết nội dung mà N. H. Abel đã trình bày, nhưng Klaye lại hiểu được năng lực to lớn của N. H. Abel. Năm 1826 Klaye đã giúp N. H. Abel cho ra đời tạp chí "Lí luận và toán học". Ba số đầu của tạp chí đã đăng 22 bài phát biểu của N.H. Abel, giới thiệu các công trình nghiên cứu toán học của N. H. Abel. Những thành tựu xuất sắc của N. H. Abel dần dần đã thu hút sự chú ý của giới toán học châu Âu. Chính vì vậy mà tạp chí này nổi tiếng cho đến tận ngày nay.

Tháng 5-1827, với tấm lòng thương nhớ quê hương Tổ quốc, N.H. Abel trở về thủ đô Otslo. Tuy nhiên, ở quê hương thì ông lại không tìm được công việc gì thích hợp. Tháng 9-1828 bốn viện sĩ hàn lâm khoa học Pháp đã yêu cầu vua Salơ XIV giúp đỡ vật chất, tạo điều kiện để N. H. Abel nghiên cứu khoa học.

Nhưng do vất vả quá độ mà bệnh lao của ông lại tái phát, đe dọa đến tính mạng của ông. Ngày 6- 4 - 1829, ngôi sao sáng rực trên bầu trời toán học đã tắt lặn.

Ngày 9-4-1829, người thân trong gia đình đã nhận được một bức thư từ Berlin gửi đến với nội dung :

"Ông N. H. Abel kính mến !

Trường chúng tôi quyết định tôn vinh ông là giáo sư toán học của trường.

Chúc mừng vinh dự đó của ông !

Trường đại học Berlin"

Nhưng bức thư này đã đến chậm, ông đã qua đời trước đó 3 ngày.

Ngày 28-6-1830, Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã trao giải thưởng lớn cho N.H.Abel.

Đó là những vinh quang sau khi ông đã qua đời.

Tất nhiên, N.H.Abel không chỉ có công lao đối với việc giải phương trình bậc 5.

Lại có câu chuyện về việc giải phương trình có bậc rất lớn như sau : Vị đại sứ Hà Lan có lần đã nói dóc với vua Henry IV rằng, nước Pháp không có nhà toán học nào có thể giải được bài toán do Adrianus Romanus (1561 - 1615) người Hà Lan đặt ra năm 1593, vì bài toán này đòi hỏi phải biết cách giải một phương trình bậc 45. F. Viète được triệu đến. Sau khi xem xét bài toán, chỉ vài phút sau ông nhận ra mối liên hệ lượng giác đặc biệt và đưa ra 2 nghiệm, sau đó thêm 21 nghiệm nữa.

Trong cuốn "De numerosa". F. Viète đã trình bày một quá trình có hệ thống nói chung để tìm xấp xỉ liên tiếp một nghiệm của một phương trình. Phương pháp này sẽ rất mất công sức khi giải các phương trình bậc cao nhưng đã được dùng cho đến hết thế kỉ XVI.

8. HAI NGÔI SAO SÁNG CHÓI TRÊN BẦU TRỜI LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Trong 2 thế kỉ XIX và XX, lịch sử toán học châu Âu đã xuất hiện hai ngôi sao toán học mới. Một ngôi sao vừa được giới thiệu ở mục 7, đó là N. H. Abel. Một ngôi sao khác là nhà toán học tài ba Évariste Galois (Galoa) (26.10.1811- 31.5.1832) người Pháp.

Năm 1824, với tài ba của mình, N. H. Abel đã mở cánh cửa bí mật kéo dài suốt 2 thế kỉ. Ông đã chứng minh được rằng phương trình bậc 5 tổng quát là không thể giải được bằng căn thức. Tuy vậy, có những phương trình bậc 5 đặc biệt, ví dụ :

$$x^5 - 32 = 0 ; \quad (8-1)$$

$$x^5 + x + 1 = 0, \quad (8-2)$$

thì có thể giải được.

Phương trình (8-2) tuy không thể dễ nhìn ra, nhưng chỉ cần biến đổi

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1) \quad (8-3)$$

thì thấy được.

Như vậy phương trình bậc 5 chỉ giải được với những điều kiện nhất định.

N. H. Abel trong mấy năm ngắn ngủi của đời mình đã miệt mài nghiên cứu, nhưng rất tiếc là chưa kịp thực hiện được ý đồ thì ông đã không còn nữa. Trả lời câu hỏi này lại phải chờ đến tài ba của É. Galois.



E. Galois

Năm 1828 người thanh niên É.Galois chỉ ra được khi nào thì một phương trình cụ thể không thể giải được bằng căn thức. Lúc đó ông chỉ là một học sinh trung học ở tuổi 17.

Cả É.Galois và N. H.Abel có nhiều điểm giống nhau rất đáng kinh ngạc, đó là đều ở cảnh nghèo khổ, đều cùng nghiên cứu phương trình bậc 5, đều chịu ảnh hưởng rất sâu sắc của thầy giáo, đều đạt được thành tựu trong cảnh ngộ bi đát, đều qua đời lúc còn rất trẻ và cũng đều có được vinh quang sau khi đã qua đời.

É. Galois ra đời ở một thị trấn ngoại ô Paris. Năm 12 tuổi ông vào học trung học. Lúc đầu, nhiều thầy giáo cho rằng ông "không có trí khôn", là "khúc gỗ khó đẽo". Nhưng không vì thế mà É. Galois lấy làm khó chịu. Ba năm sau, ông được giáo sư H. J. Vernier dạy toán. Dưới sự dìu dắt của H.J. Vernier, É. Galois đã được tiếp cận với nhiều tác phẩm toán học nổi tiếng.

Năm 16 tuổi (1827) É. Galois bắt đầu đi sâu vào nghiên cứu lý luận phương trình. Ông cho rằng, tuy N.H.Abel đã có những thành tựu nổi tiếng thế giới nhưng chưa giải quyết được vấn đề : khi nào thì một phương trình giải được bằng căn thức. Do vậy É.Galois đã đi sâu nghiên cứu vấn đề này.

Năm 1828, É.Galois lại được một thầy giáo toán học tài ba giúp đỡ và nhờ vậy mà ông đã có những phát minh mang tính thời đại. Ông đã giải quyết triệt để vấn đề điều kiện để phương trình đại số giải được bằng căn thức. É.Galois đã vui sướng phát điên lên, ông đã tập hợp thành quả đó gửi đến Viện Hàn lâm khoa học Pháp để thẩm định.

Ngày 1-6-1828, Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã họp để xem xét luận văn của É.Galois. Chủ trì Viện Hàn lâm khoa học Pháp là giáo sư



A-L. Cauchy

Augustin - Louis Cauchy (Cosi) (21.8.1789 - 23.5.1857). Khi A.L.Cauchy mở túi hồ sơ của É.Galois ra thì không thấy tài liệu đầu nữa.

Tháng 1-1830, sau thời gian cặm cụi thu thập lại, É.Galois lại gửi luận văn của mình cho Viện Hàn lâm khoa học Pháp. Lần này, Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã nhường tư cách thẩm định cho viện sĩ Jean - Baptiste - Joseph Baron Fourier (Phuriê) (21.3.1768 - 16.5. 1830). Đáng tiếc là không chờ đến cuộc họp, vì tuổi cao sức yếu J.B. J.B. Fourier đã qua đời. Người ta chưa biết được đánh giá của J.B. J.B. Fourier ra sao, và lại không tìm được luận văn của É.Galois ở đâu nữa.

Đã hai lần bất hạnh đến với É.Galois nhưng ông không nản chí. Năm 1831, lần thứ ba ông lại gửi luận văn của mình đi. Lần này lại do giao sư Siméon - Denis Baron Poisson (21.6.1781 - 25.4.1840) phụ trách đánh giá luận văn. Sau 4 tháng xem xét, cuối cùng S.D.B. Poisson viết mấy chữ trên bìa luận văn : "Hoàn toàn không thể hiểu được". Như vậy là toàn bộ luận văn lại bị đưa vào kho tư liệu và lãng quên.

Lúc đó É.Galois lại bắt đầu dốc thân vào cuộc cách mạng tư sản Pháp. Tháng 5-1831 ông bị bắt bỏ tù với tội danh mưu sát nhà vua. Về sau vì chứng cứ không đầy đủ, ông được thả. Ngày 14-7 năm đó, ông lại bị bắt, đến ngày 29-4 năm sau lại được thả. Nhưng bọn phản động không để yên cho ông, đã sắp tâm đưa É.Galois vào trận đấu vì tranh chấp tình yêu. Sáng sớm ngày 30-5-1832 trên thảm cỏ cạnh bờ hồ, ông đã phải nhận một viên đạn vào bụng. Sau 24 giờ, nhà toán học thiên tài chưa đầy 21 tuổi đã từ giã cõi đời.

Trước ngày đấu súng, É.Galois đã kịp tập hợp toàn bộ công trình toán học của mình giao lại cho người bạn thân là Auguste Chevalier. Ông viết : "Về lí luận phương trình, tôi đã nghiên cứu điều kiện có thể giải phương trình bằng căn thức. Điều này đã giúp tôi phát triển lí luận và mô tả tất cả mọi thay đổi đối với phương trình làm cho phương trình này không thể dùng

cần thức để giải được. Tất cả những nội dung này đều có thể tìm thấy trong luận văn của tôi".

... "Hoàn toàn không cần thẩm định tính đúng đắn của định lí mà cần hiểu tầm quan trọng của nó. Từ nay, tôi hi vọng rằng, sẽ có người phát hiện, chỉnh lí những điều đó để biến nó thành điều có ích". Nhưng rồi luận văn của ông cũng lại không được đưa đến nơi ông mong muốn.

Theo nguyện vọng của É.Galois, A.Chevalier đã đăng bức thư của ông trên "Bình luận bách khoa".

Năm 1846, nhà toán học Joseph Liouville (24.3.1809 - 8.9.1882) người Pháp, trong khi chỉnh lí lại những di cảo của É.Galois đã rất kinh ngạc khi phát hiện ra luận văn của ông và J.Liouville liền đưa nó lên tạp chí toán học của mình. Nhờ đó đã làm sống lại đóa hoa toán học đầy trí tuệ của loài người đã bị vùi dập 14 năm trời.



J. Liouville

Thành tựu của É.Galois đã mở ra một lĩnh vực mới cho đại số học : "Lí thuyết nhóm". Đây là một ngành toán học đầy sức sống.

Thế nào gọi là "nhóm" ? Nhóm là một khái niệm được định nghĩa chính xác. Sau đây chúng ta giới thiệu khái quát về nhóm :

Giả sử α, β, γ là một phép thế của 1, 2, 3, tức là x_α thay cho x_1 , x_β thay cho x_2 , x_γ thay cho x_3 . Ta có :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \end{pmatrix} \quad (8-1)$$

Vì phép thế vừa nêu phụ thuộc thứ tự các đại lượng nên có thể viết :

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_\beta & x_\gamma & x_\alpha \end{pmatrix} \text{ hoặc } \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ x_\gamma & x_\beta & x_\alpha \end{pmatrix} \quad (8-2)$$

Với ba số hạng (ba cột) thì được 6 loại :

$$\left. \begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\ c &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

Mỗi phép thế gọi là *phần tử*. Phần tử không đổi thứ tự gọi là *phần tử đơn vị*, đó chính là (I) ở (8-3). Biến đổi liên tiếp hai lần thì gọi là "tích", được ghi là ".". Ví dụ :

$$a \cdot c = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = d.$$

Tích hai phần tử là phần tử đơn vị (I) thì phần tử thứ hai gọi là *phần tử nghịch đảo*. Như chúng ta dễ thấy :

a . b = I, thì b chính là phần tử nghịch đảo của a và có thể ghi là $b = a^{-1}$.

Rõ ràng, các phép thế ba số hạng sẽ có tính chất như sau :

1. Tích của hai phần tử bất kì vẫn là một phần tử. Điều này có thể biểu thị như bảng 8-1.

Bảng 8-1

Tích của hai phần tử

	I	a	b	c	d	e
I	I	a	b	c	d	e
a	a	b	I	d	e	c
b	b	I	a	e	c	d
c	c	e	d	I	b	a
d	d	c	e	a	I	b
e	e	b	c	b	a	I

2. Tích của phần tử thỏa mãn với tính chất kết hợp :

$$a.(b.c) = (a.b).c.$$

3. Tồn tại phần tử đơn vị 1.

4. Đối với bất cứ phần tử nào cũng tồn tại phần tử nghịch đảo :

$$a^{-1} = b, b^{-1} = a, c^{-1} = c, d^{-1} = d, e^{-1} = e.$$

Phép kết hợp các phần tử thỏa mãn 4 tính chất vừa nêu, đó chính là "tích" xác định một nhóm. É.Galois đã bị thu hút bởi khái niệm nhóm này và nhờ đó, ông đã phát hiện ra rằng, mỗi phương trình đại số có một nhóm biến đổi phản ánh đặc trưng của nó.

9. ĐIỀU NGHI NGỜ VỀ "VỤ ÁN CHIẾC VƯƠNG MIỆN"

"Vụ án chiếc vương miện" đã trở thành câu chuyện lịch sử. Đến năm 1581, tức là sau 18 thế kỉ, kể từ khi xảy ra vụ án, Galileo Galilei (16.2.1564 - 8.1.1642) người Italia (lúc này mới 17 tuổi) cũng đã có hứng thú đối với "Vụ án chiếc vương miện". Ông rất ngưỡng mộ học giả Archimède. Ông đã đọc nhiều sách của Archimède và có thái độ học tập rất cẩn thận. Một hôm, ông đọc cuốn "Bản vẽ lực nổi" của Archimède, trong đó có rất nhiều tranh minh họa, khiến ông rất ngạc nhiên. Thỉ ra trong sách Archimède đã mô tả định luật của mình bằng hình vẽ.

Sự kiện trên đây đã làm cho G.Galilei có những hoài nghi về "Vụ án chiếc vương miện". Ông cảm thấy nhà toán học

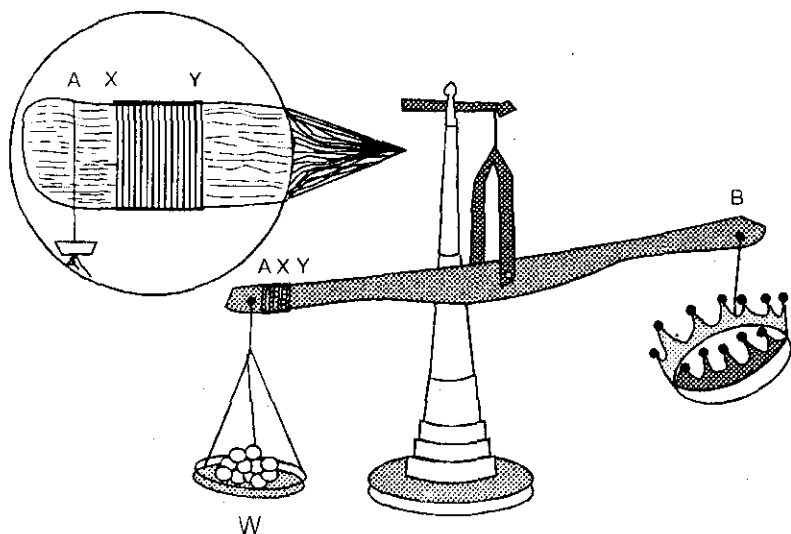


G.Galilei

suy nghĩ chặt chẽ như Archimède quyết không thể chỉ dừng lại ở kết luận nông cạn : "Nước mà chiếc vương miện làm tràn ra nhiều hơn nước mà khối vàng ròng làm tràn ra", như vậy ! Archimède nhất định sẽ tìm ra trong vương miện pha trộn bao nhiêu bạc. Song, nếu theo cách đã nói trong câu chuyện ở mục 1 thì phải đo thật chính xác thể tích nước mà vương miện và khối vàng ròng làm tràn ra. Đây có thể là việc làm cực kì khó khăn. G.Galilei cho rằng, Archimède đã làm cách khác tinh vi hơn nhiều và đã xác định được thành phần bạc có trong chiếc vương miện. Vậy, nếu tôi là Archimède thì tôi phải làm gì ?

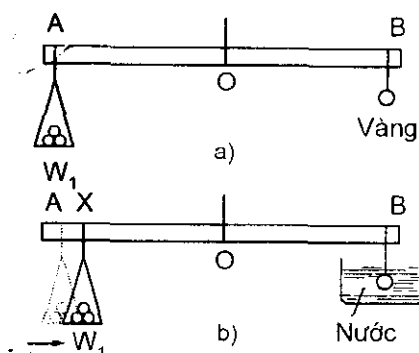
Thế là G.Galilei đã dùng "nguyên lí đòn bẩy" và "nguyên lí lực đẩy của nước" của Archimède làm cơ sở để tìm ra phương pháp chính xác hơn. Trời không phụ người có công, cuối cùng G.Galilei đã thành công. Ông đã mô tả cách suy nghĩ của mình trong bài "Chiếc cân nhỏ". Trong bài viết này lần đầu tiên thể hiện thiên tài của ông.

Chắc bạn đọc muốn biết "Chiếc cân nhỏ" của G.Galilei là thế nào ? Hình 9-1 mô tả điều mà ông đã viết. Nhìn bề ngoài nó rất giống một cái cân thiên bình, chỉ khác là trên đoạn XY ở



Hình 9-1

cánh tay đòn có chia những độ ngắn. Quả cân có thể chuyển động trên đoạn có chia độ (XY) và chúng ta có thể đọc được vị trí của nó. Tuy nói là "Chiếc cân nhỏ" nhưng sự thực không phải là nhỏ, bởi vì cánh tay đòn dài hơn 1 mét, chỉ có đoạn chia độ (XY) là bé, chỉ có 2 - 3 mm.



Hình 9-2

Vậy đoạn chia độ (XY) như thế nào? Hãy xem hình 9-2. Trước hết tại điểm B ta treo một mẫu vàng có trọng lượng W_G sau đó treo quả cân ở điểm A sao cho nó cân bằng với mẫu vàng (W_1) (hình 9-2a). Rồi thả mẫu vàng vào nước (hình 9-2b). Lúc đó mẫu vàng chịu tác dụng của lực đẩy của nước, làm cho lực tác dụng lên B nhẹ đi một ít. Mức cân bằng bị phá vỡ. Để giữ được mức cân bằng mới, tất nhiên phải đưa quả cân về bên phải điểm A, tức là điểm X.

Dưới đây chúng ta sẽ nói rõ, việc xác định điểm X không có liên quan gì đến mẫu vàng. Đây là chỗ tuyệt vời của chiếc cân A.Galilei.

Trên thực tế giả định thể tích mẫu vàng là V_G , còn tỉ trọng (trọng lượng của một đơn vị thể tích) của vàng là d_G . Vậy trọng lượng mẫu vàng W_G có thể tính được :

$$W_G = d_G \cdot V_G. \quad (9-1)$$

Khi mẫu vàng được thả vào nước, do chịu sức đẩy của nước, lực tác dụng lên B giảm một lượng bằng trọng lượng của thể tích nước mà mẫu vàng chiếm chỗ (bằng thể tích mẫu vàng V_G). Cho nên tại B chịu một lực là $(d_G - 1) \cdot V_G$.

Từ (9-1) và theo nguyên lý đòn bẩy, từ hai lần cân ta có :

$$\left. \begin{aligned} W_1 \cdot \overline{OA} &= W_G \cdot \overline{OB} = d_G \cdot V_G \cdot \overline{OB}; \\ W_1 \cdot \overline{OX} &= (d_G - 1)V_G \cdot \overline{OB}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

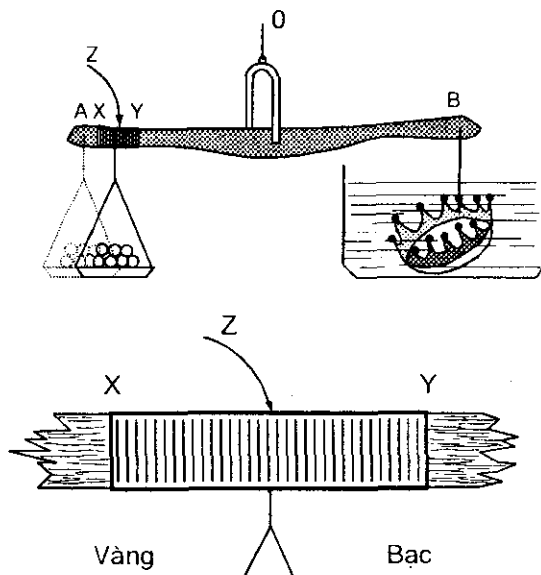
Từ hệ phương trình (9-2) ta có :

$$\overline{OX} = \left(1 - \frac{1}{d_G}\right) \cdot \overline{OA}. \quad (9-3)$$

Từ (9-3) thấy rằng, vị trí X chỉ liên quan đến tỉ trọng d_G của vàng và vị trí của A, mà hai đại lượng này không thay đổi, vậy vị trí của X là cố định.

Nếu ta đổi mẫu vàng là mẫu bạc và cũng làm như trên thì chúng ta được vị trí của điểm Y cũng cố định.

Bây giờ ta cũng làm như vậy đối với chiếc vương miện sẽ xác định được điểm Z ở giữa điểm X và điểm Y (hình 9-3).



Hình 9-3

Trong bài "Chiếc cân nhỏ" của G.Galilei có nói "Độ dài ZY so với độ dài ZX chính là tỉ lệ trọng lượng giữa vàng và bạc trong chiếc vương miện".

Phép chứng minh của G.Galilei không có gì khó hiểu đối với học sinh trung học. Giả thiết, vương miện có trọng lượng W_k , trong đó trọng lượng phần vàng là u và phần bạc là v , dùng d_s và d_k để chỉ tỉ trọng của bạc và của vương miện. Vậy theo quan hệ tương đương trọng lượng và thể tích ta có :

$$\left. \begin{aligned} u + v &= W_k ; \\ \frac{u}{d_G} + \frac{v}{d_s} &= \frac{W_k}{d_k} \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

Đây là hệ phương trình bậc 1 hai ẩn nên dễ dàng giải được :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\left(\frac{1}{d_s} - \frac{1}{d_k}\right)}{\left(\frac{1}{d_s} - \frac{1}{d_G}\right)} \cdot W_k ; \\ v &= \frac{\left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_G}\right)}{\left(\frac{1}{d_s} - \frac{1}{d_G}\right)} \cdot W_k \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

Mà tỉ lệ trọng lượng giữa vàng và bạc là :

$$u : v = \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_s}\right) : \left(\frac{1}{d_G} - \frac{1}{d_k}\right) \quad (9-6)$$

Tương tự (9-3) ta có :

$$\left. \begin{aligned} \overline{OY} &= \left(1 - \frac{1}{d_s}\right) \cdot \overline{OA} ; \\ \overline{OZ} &= \left(1 - \frac{1}{d_k}\right) \cdot \overline{OA} \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

Vậy :

$$\begin{aligned} \overline{ZY} : \overline{ZX} &= \left[\left(1 - \frac{1}{d_s}\right) - \left(1 - \frac{1}{d_k}\right)\right] : \left[\left(1 - \frac{1}{d_k}\right) - \left(1 - \frac{1}{d_s}\right)\right] = \\ &= \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_s}\right) : \left(\frac{1}{d_G} - \frac{1}{d_k}\right) \end{aligned} \quad (9-8)$$

Từ (9 - 8) và (9 - 6) ta có :

$$u : v = \overline{ZY} : \overline{ZX}. \quad (9-9)$$

Đây là kết luận của G.Galiei.

"Vụ án chiếc vương miện" 1800 năm về trước đã được G.Galilei kết luận. Từ đó nếu ai muốn biết trong chiếc vương miện có bao nhiêu bạc thì cũng đã có cách tìm được. Như vậy hẳn mọi người đã mãn nguyện.

Tuy nhiên, lúc đó Archimède có làm như vậy hay không, hoặc ông chưa làm nhưng có nghĩ như vậy hay không thì đến nay vẫn không thể kiểm tra được. Chỉ biết rằng, tài ba của G.Galilei đã nổi tiếng qua "Chiếc cân nhỏ".

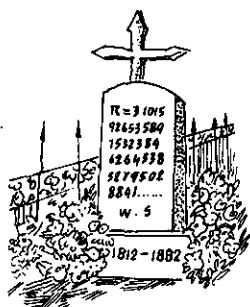
10. CÁC BIỂU TƯỢNG KHẮC TRÊN BIA MỘ

Từ cổ chí kim, hầu như chỉ có trên bia mộ của các nhà toán học mới khắc những điều đơn giản nhưng ý nghĩa sâu sắc. Trên bia mộ của họ thường chỉ khắc một hình hoặc một con số nhưng đó là biểu tượng sáng chói mà nhà toán học đã theo đuổi suốt đời.

Nhà toán học Ludolph von Ceulen (1540 - 1610) người Đức đã rất tự hào về việc ông tìm được giá trị của π với 35 số thập phân (năm 1610) nên đã di chúc là khắc lên bia mộ của ông 35 số thập phân này.

Nhà toán học William Shanks (1812 - 1882) người Anh đã tìm ra giá trị của π với 707 số thập phân nên sau khi ông qua đời người ta đã khắc lên bia mộ của ông câu kết tinh tâm huyết cả đời ông : 707 số thập phân của π (hình 10-1).

Nhà toán học Archimède trong câu chuyện "Vụ án chiếc vương miện" đã nói ở mục 1 thì trên bia mộ của ông có khắc một



Hình 10-1



Hình 10-2

hình trụ tròn có chiều cao bằng đường kính và trong lòng hình trụ đó có chứa một hình cầu mà đường kính của nó đúng bằng chiều cao hình trụ (hình 10-2). Biểu tượng này thể hiện phát minh sau đây của Archimède :

Tỉ số giữa thể tích của hình cầu và của hình trụ bằng tỉ số giữa diện tích của hình cầu và diện tích toàn phần của hình trụ và bằng $\frac{2}{3}$, tức là

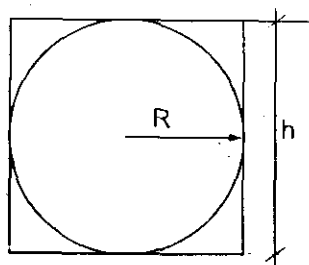
$$\frac{V_c}{V_T} = \frac{S_c}{S_T} = \frac{2}{3} \quad (10-1)$$

Ở hình học lớp 9 ta đã biết thể tích và diện tích (toàn phần) của hình trụ tròn thẳng đứng (hình 10-3) tính theo công thức :

$$\left. \begin{aligned} V_T &= \pi R^2 h; \\ S_T &= 2\pi R(R + h), \end{aligned} \right\} \quad (10-2)$$

trong đó R là bán kính đáy ;
 h là chiều cao.

Từ (10-1), (10-2) và chú ý là $h = 2R$, ta được :



Hình 10-3

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_c}{V_T} &= \frac{V_c}{\pi R^2 h} = \frac{V_c}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}; \\ \frac{S_c}{S_T} &= \frac{S_c}{2\pi R(R+h)} = \frac{S_c}{6\pi R^2} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

Vậy :

$$\left. \begin{aligned} V_c &= \frac{4}{3} \pi R^3; \\ S_c &= 4\pi R^2. \end{aligned} \right\} \quad (10-4)$$

Đây là công thức tính thể tích và diện tích hình cầu suy ra từ phát minh của Archimède.

Điều bất ngờ ở đây là, tấm bia trên mộ của Archimède lại không phải do người thân hay bạn bè của ông khắc lên, mà chính là do kẻ thù của ông, đó là tướng Marcellus của La Mã đã từng kinh hoàng khi nghe đến tên ông nhưng lại cũng rất kính phục ông.

Nhà toán học nổi tiếng Jakob Bernouilli (27.12.1654 - 16.8.1705) người Thụy Sĩ thì có những cống hiến quan trọng trong rất nhiều ngành toán học. Nhưng điều mà ông say mê nhất vẫn là tính chất kì lạ của đường xoắn ốc xuôi và ngược (hình 10-4). Trước khi qua đời, ông yêu cầu sau khi ông không còn nữa hãy khắc lên bia mộ ông đường xoắn ốc này và ghi dòng chữ : "Eadem mutata resurgo" (Dù tôi đã mất nhưng vẫn còn nguyên như cũ).



Jakob Bernouilli



Hình 10-4

Trên bia mộ của nhà toán học được gọi là "thầy tổ của đại số học" Diophantus lại hết sức kì lạ, như một bài toán đố :

"Hỡi người qua đường ! Ở đây đã chôn năm xương tàn của Diophantus. Những con số dưới đây sẽ cho các bạn biết một phần cuộc đời ông :

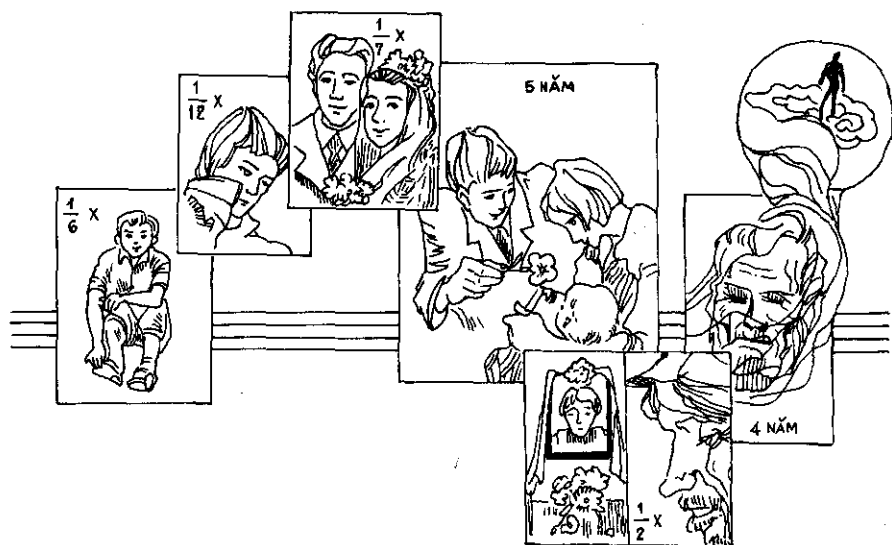
" $\frac{1}{6}$ cuộc đời là tuổi ấu thơ hạnh phúc,

" $\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo đã mọc lơ thơ những sợi ria.

"Phải trải qua $\frac{1}{7}$ cuộc đời nữa ông mới lấy vợ,

"Sau đó là 5 năm đầy hạnh phúc và có được một đứa con trai,

"Nhưng đứa trẻ này, cuộc sống đẹp đẽ của nó chỉ bằng một nửa bố nó.



"Sau khi đứa con qua đời, người bố sống trong 4 năm đầy đau buồn sâu lắng, rồi kết thúc cuộc đời ở trần thế".

Xin hỏi : Diophantus sống bao nhiêu tuổi, lấy vợ và sinh con khi nào ?

Diophantus (246 - 330) sinh ra, lớn lên và thành đạt tại thành phố cảng Alêchxandria (nay thuộc Cộng hòa Ai Cập). Bài toán đố khắc trên bia mộ của ông là 1 trong 46 bài toán dưới dạng thơ trào phúng có trong bộ sưu tập các bài toán đại số thời Hi Lạp cổ đại "Hợp tuyển Palatine" (Hợp tuyển Hi Lạp) của nhà ngữ pháp Metrodorus, xuất bản vào khoảng năm 500.

Trở lại bài toán trên bia mộ Diophantus. Nếu gọi x là tuổi của ông, ta có phương trình :

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 = \frac{x}{2} - 4. \quad (10-5)$$

Giải phương trình bậc 1 (10-5) ta được $x = 84$, tức là Diophantus thọ 84 tuổi. Ngoài ra còn biết thêm một số chi tiết về cuộc đời ông :

- Tuổi thơ trong 14 năm $\left(\frac{x}{6} = \frac{84}{6} = 14\right)$.
- Đến 21 tuổi thì mọc lơ thơ những sợi ria $\left(14 + \frac{x}{12} = 14 + \frac{84}{12} = 21\right)$.
- Lấy vợ năm 33 tuổi $\left(21 + \frac{x}{7} = 21 + \frac{84}{7} = 33\right)$.
- Có con lúc 38 tuổi $(33 + 5 = 38)$.
- Con của ông sống được 42 tuổi $\left(\frac{x}{2} = \frac{84}{2} = 42\right)$.

Trong "Hợp tuyển Hi Lạp" cũng có bài toán tương tự để tính tuổi Dimochares.

Diophantus còn để lại cho đời bộ sách "Phép làm toán". Bộ sách này đã



Euclid

có ảnh hưởng rất lớn về sau, là tác phẩm về đại số vào loại sớm nhất và có tầm cỡ ngang với bộ sách "Nguyên lý" của Euclid (330 - 275 trước Công nguyên) người Hi Lạp cổ đại.

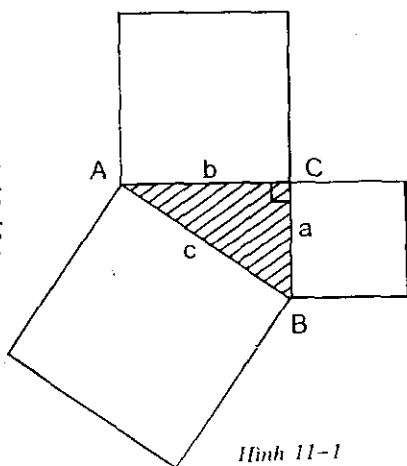
11. AI ĐÃ TÌM RA ĐỊNH LÝ PYTHAGORES ?

Trong hình học lớp 8 định lý Pythagores được phát biểu như sau : "Diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền của tam giác vuông bằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông" (hình 11-1), tức là

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (11-1)$$

trong đó a, b là hai cạnh góc vuông ;

c là cạnh huyền.



Hình 11-1



Pythagore

Định lý Pythagore có thể phát biểu dạng khác : "Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài của hai cạnh góc vuông".

Nhà toán học Pythagore sinh năm 569 trước Công nguyên tại đảo Samos thuộc Hi Lạp cổ đại, sống ở nhiều nơi (thành Miletus, miền Nam Italia, ...) và trong một cuộc bạo động của dân chúng



Hình 11-2

năm 489 trước Công nguyên người ta phát hiện được thi thể của ông trong ngôi trường bị cháy ở Metapontum. Ông được xem là người đã chứng minh định lý này sớm nhất (hình 11-2). Có nhiều phỏng đoán về cách chứng minh của ông nhưng nhiều người cho rằng có lẽ ông đã chứng minh bằng cách tách ra từng phần.

Theo truyền thuyết, những người theo trường phái Pythagores đã vui mừng khôn xiết khi ông chứng minh được định lý này và

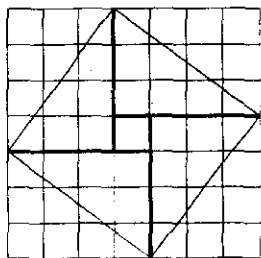
họ đã giết 100 con bò để ăn mừng, vì vậy định lý này còn có tên là "định lý 100 con bò". Nhưng đây là bò được nặn bằng bột, vì những người theo trường phái này có điều lệ cấm kỵ mọi cuộc đổ máu (sát sinh). Tuy vậy, họ lại rất bí mật điều đã chứng minh được, cho nên cách chứng minh xưa nhất về định lý này còn truyền lại đến ngày nay là cách chứng minh được nêu trong bộ sách "Nguyên lý" của Euclid.

Cần nhấn mạnh là, định lý Pythagores còn có tên là "định lý tam giác". Và như đã nói ở trên, cho đến nay việc khẳng định ai đã chứng minh định lý này đầu tiên vẫn chưa có câu trả lời chính xác. Theo thói quen người ta vẫn cho là của Euclid.

Xem xét kĩ các tư liệu người ta cho rằng, người Babilon cổ đại thời Hammomurabi (khoảng thế kỉ XVI trước Công nguyên) đã biết dùng "định lý tam giác" khi tính chiều dài đường chéo hình chữ nhật.

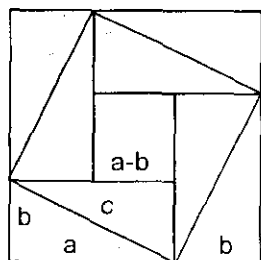
Ở Trung Hoa cổ đại, khoảng thế kỉ XI trước Công nguyên người ta đã biết tam giác ba cạnh 3, 4 và 5 là tam giác vuông (Trần Hạo) và đến thế kỉ VI trước Công nguyên người ta đã biết trường hợp tổng quát của "định lý tam giác" (Seng Xu). Trong bộ sách "Chu bì toán kinh" ra đời vào khoảng đầu thế kỉ II trước Công nguyên đã ghi lại đoạn đối thoại giữa Chu Công và Thương Cao ở thế kỉ XI trước Công nguyên : "Cạnh

ngắn 3, cạnh dài 4, phù hợp với cạnh 5" và đề cập đến cách sử dụng "định lý tam giác". Trong bộ sách này còn nói đến hình 11-3 (gọi là "Huyền đồ") khắc trên đá về chứng minh định lý này và việc Trần Tử thế kỉ VII trước Công nguyên đã giải thích "định lý tam giác" như sau: "Từ một điểm kéo nghiêng đến Mặt Trời, từ Mặt Trời hạ xuống ta gặp cạnh ngắn. Chiều cao của Mặt Trời là cạnh dài. Lấy tổng bình phương của cạnh ngắn và cạnh dài đem khai phương ta sẽ được đường xiên Mặt Trời.



Hình 11-3

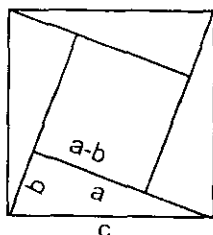
Trong chương IX của bộ sách kiệt xuất "Sách toán chín chương" của Trần Sanh cũng nói đến "định lý tam giác" dưới dạng quy tắc "câu - cổ" ("câu" là cạnh ngang, thường là cạnh ngắn hơn, "cổ" là cạnh đứng) và ông đưa ra hình 11-4 để chứng minh "định lý tam giác".



Hình 11-4

Vào thế kỉ III, học giả Triệu Quân Khanh (Triệu Hiệp) người nước Ngô (thời Tam Quốc) đã chú giải bộ sách "Chu bì toán kinh" và đã giải thích "định lý tam giác" bằng hình vẽ. Đây có lẽ là chứng minh "định lý tam giác" sớm nhất ở Trung Hoa còn lưu truyền đến ngày nay.

Các nhà toán học Ấn Độ biết "định lý tam giác" trước thế kỉ VIII trước Công nguyên với nội dung là: "Diện tích hình vuông dựng trên đường chéo của hình chữ nhật bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên cạnh ngang và cạnh dọc" hoặc ngắn gọn hơn: "Cái tạo ra trên hai cạnh bằng cái tạo ra trên đường chéo". Nhà toán học Bhaskara đã chứng minh "định lý tam giác" đơn giản hơn người Trung Hoa (hình 11-5). Cách chứng minh "định lý tam giác" trong sách giáo khoa hình học 8 hiện nay (vẽ chiều cao lên cạnh huyền) là chứng minh của Bhaskara.



Hình 11-5

Thế kỉ VII, trước Công nguyên người Ai Cập cổ đại cũng đã biết dùng sợi dây có các nút đánh dấu 12 đoạn cách đều nhau để dựng góc vuông. Họ đã đo ba cạnh ứng với 3, 4 và 5 đoạn rồi đóng ba cọc ấn định ba đỉnh tam giác (hình 11-6). Khi đó trên mặt đất góc vuông được tạo bởi hai cạnh có độ dài 3 và 4 đoạn và họ đã dùng cách dựng này khi làm đàn harpe. "Định lí tam giác" ở đây được dùng

hiều trong xây dựng và gọi là "tam giác Ai Cập".

Như vậy là có rất nhiều cách chứng minh "định lí tam giác". Trong cuốn "Mệnh đề Pythagores" xuất bản lần thứ hai (1994) E.S.Loomis đã thu thập và phân loại được gần 370 cách chứng minh định lí nổi tiếng này.

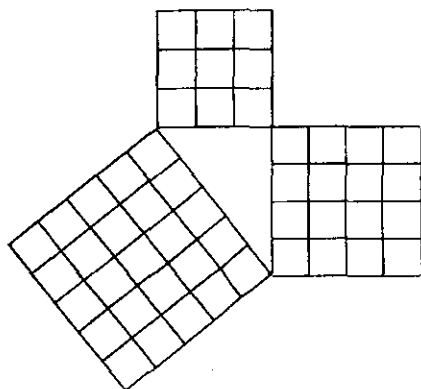
"Định lí tam giác" là định lí hình học đầu tiên của nhân loại nhưng là một trong hai định lí quan trọng nhất của hình học.



Hình 11-6

Nhờ định lí này mà người ta đã tìm được nhiều hệ thức trong các hình, tính các cạnh, chiều cao, trung tuyến của tam giác, đường chéo, hình bình hành , ...

"Định lí tam giác" đơn giản nhưng lí thú, đến mức nhiều nhà toán học cam đoan rằng, nếu có con người ở các hành tinh khác thì một trong những định lí hình học đầu tiên có giá trị mà họ tìm ra cũng sẽ chính là "định lí tam giác". Do vậy đã có dự án đề nghị xây dựng các công trình hoặc tường cây xanh tạo thành tam giác vuông có ba cạnh 3, 4 và 5 khổng lồ trên cánh đồng lớn để liên lạc với người ngoài Trái Đất. Thật là một dự án ít tốn kém.



Hình 11-7

Còn trong các thông điệp mà hai trạm thăm dò Voyager 1 và 2 của Mỹ phóng lên vũ trụ ngày 8-9-1977 cũng có một bức vẽ biểu diễn "định lí tam giác" (hình 11-7).

12. DIOPHANTUS VÀ BỘ BA SỐ TAM GIÁC

Liên hệ mật thiết với "định lí tam giác" là bài toán tìm các số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn điều kiện (định lí) (11-1) :

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (12-1)$$

để chúng có thể là ba cạnh của tam giác vuông, đó là bộ ba số tam giác.

(12-1) là phương trình vô định bậc 2 ba ẩn. Để giải phương trình này, chỉ cần xét trường hợp x, y và z nguyên tố cùng nhau từng đôi một, các trường hợp khác có thể quy về trường hợp này.

Bộ ba số tam giác có giá trị bé nhất là 3, 4, 5 mà người Ai Cập cổ đại đã biết từ thế kỉ XXIII trước Công nguyên.

Có những sự kiện bị che đậy mãi về sau người ta mới phát hiện được. Công lao đầu tiên thường là nhờ vào các nhà khảo cổ học. Như các tấm đất sét nung (như sành) có chữ của người Babilon cổ đại được khắc bằng mũi dao nhọn có từ thế kỉ XIX đến thế kỉ XVI trước Công nguyên, tức là trước rất lâu so với thời Pythagores nhưng mới tìm được vào năm 1945. Người ta đã tìm thấy khoảng 50 vạn bản, trong đó có 150 bản với các bài toán có lời giải và 200 bảng số. Người ta đã đọc được một phần bản thảo kì lạ trên các tấm đất sét này. Một số tấm đất sét này đang được lưu giữ ở Trường đại học Colombia (Mỹ) có ghi 15 bộ ba tam giác (15 dòng) mà người ta thường gọi là bản Plimpton 322 (bảng 12-1). Đây là bảng số đáng chú ý nhất trong các bảng toán học Babilon. Bảng này được mang tên nhà toán học G.A. Plimpton (1855 -1936). Chữ số 322 là số thứ tự mục nhập trong bộ. Bảng 12-1 được O.Neugebauer (sinh 1899) và A.J. Sachs (sinh 1914) mô tả năm 1945.

Bảng 12-1

Bản Plimpton 322

120	119	169	1
3456	3367	4825	2
4800	4601	6649	3
13500	12709	18541	4
72	65	97	5
360	319	481	6
2700	2291	3541	7
960	799	1249	8
600	481 (541)	769	9
6480	4961	8161	10
60	45	75	11
2400	1679	2929	12
240	161 (25921)	289	13
2700	1771	3229	14
90	56	106 (53)	15

Trong bảng 12-1 thì cột bên phải là số thứ tự, để đếm số hàng (dòng), ba cột còn lại là ba cạnh của tam giác vuông. Các số trong ngoặc đơn là những ngoại lệ trong nguyên bản, còn các số bên trái nó là số liệu đã được chỉnh li.

Một bộ ba số tam giác không chứa một thừa số chung nguyên nào ngoài đơn vị thì đó là bộ ba số tam giác nguyên thủy.

Hiện nay vẫn chưa ai có thể giải thích được là tại sao người Babilon cổ đại lại có thể tìm ra được các con số đó. Với các số rất lớn có trong bảng 12-1 thì có lẽ còn lâu mới có người hiểu được.

Hiện còn rất nhiều tấm đất sét đặc biệt này chưa được giải mã, thậm chí chưa ai đọc đến.

Trước thế kỉ VI trước Công nguyên, tức là sau niên đại của bản Plimpton hơn 10 thế kỉ, người Hi Lạp cổ đại đã chỉ ra rằng, bộ ba số tam giác nguyên thủy được tính theo công thức :

$$\left. \begin{aligned} x &= 2mn ; \\ y &= m^2 - n^2 ; \\ z &= m^2 + n^2, \end{aligned} \right\} \quad (12-2)$$

trong đó m, n là các số nguyên tố cùng nhau, có tính chẵn lẻ khác nhau và $m > n$. Ví dụ, nếu $m = 2, n = 1$ thì ta được bộ ba số tam giác nguyên thủy có giá trị bé nhất (3, 4, 5).

Từ (12-2) người ta tìm được bằng một số bộ ba số tam giác nguyên thủy ở bảng 12-2.

Pythagores đã đưa ra công thức sau đây để tìm bộ ba số tam giác :

$$\left. \begin{aligned} x &= m ; \\ y &= \frac{1}{2} (m^2 - 1) ; \\ z &= \frac{1}{2} (m^2 + 1), \end{aligned} \right\} \quad (12-3)$$

trong đó m là số nguyên dương lẻ.

Một số bộ ba số tam giác nguyên thủy

x	y	z	m	n
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27

Pythagores còn đưa ra cách tìm sau đây : Lấy một số lẻ tùy ý, đem bình phương, rồi phân thành hai số chênh nhau 1 đơn vị. Ví dụ, lấy $2m + 1$, ta có :

$$(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1. \quad (12-4)$$

Phân vế phải của (12-4) thành hai số :

$$2m^2 + 2m \text{ và } 2m^2 + 2m + 1.$$

Ta được :

$$\left. \begin{aligned} x &= 2m + 1 ; \\ y &= 2m^2 + 2m = 2m(m + 1) ; \\ z &= 2m^2 + 2m + 1 = 2m(m + 1) + 1. \end{aligned} \right\} \quad (12-5)$$

Chẳng hạn, lấy 67, ta có :

$$67^2 = 4489.$$

Phân thành hai số : 2244 và 2245.

Ta được :

$$67 ; 2244 \text{ và } 2245.$$

Các môn sinh của Pythagores lại đưa ra công thức

$$\left. \begin{aligned} x &= m^2 ; \\ y &= \left(\frac{m^2 - 1}{2} \right)^2 ; \\ z &= \left(\frac{m^2 + 1}{2} \right)^2 , \end{aligned} \right\} \quad (12-6)$$

trong đó m là số lẻ bất kì.

Platon (427 - 347 trước Công nguyên) người Athen (Hi Lạp) là nhà toán học nổi tiếng cũng đã tìm được (12-3) và năm 380 trước Công nguyên ông đã tìm được công thức tương tự (12-6) :

$$\left. \begin{aligned} x &= (2m)^2 ; \\ y &= (m^2 - 1)^2 ; \\ z &= (m^2 + 1)^2 . \end{aligned} \right\} \quad (12-7)$$

trong đó m là số lẻ hoặc số chẵn bất kì .



Platon

Ở Trung Hoa, vào khoảng thế kỉ XI trước Công nguyên

nhà toán học Thương Cao cũng đã đề cập đến bộ ba số tam giác 3, 4, 5 và trong bộ sách "Sách toán chín chương" cũng đã đưa ra bộ ba số tam giác và cách tìm kì diệu hơn :

Nếu cho hai số m, n thì

$$\left. \begin{aligned} x &= mn ; \\ y &= \frac{1}{2} (m^2 - n^2) ; \\ z &= \frac{1}{2} (m^2 + n^2) . \end{aligned} \right\} \quad (12-8)$$

Nhà toán học Liu Hui (Lưu Huy) (khoảng 225 - 295) người Trung Hoa đã dùng phương pháp hình học cũng tìm được (12-8) vào năm 263.

Diophantus đã phát hiện ra rằng, các công thức đã có để tìm các bộ ba số tam giác đều chưa tìm được tất cả các bộ ba số tam giác, ví dụ bộ ba số (8, 15, 17) thì không thể dùng (12-3) để tìm được. Tất nhiên, cùng một bộ ba số tam giác thì có thể tìm theo các công thức khác nhau, ví dụ bộ ba số (20, 21, 29) có thể tìm theo (12-8) nếu cho $m = 7$, $n = 3$ hoặc theo (12-2) nếu cho $m = 5$, $n = 2$. Thế là ông đã bỏ công sức để tìm cách tạo nên tất cả các bộ ba số tam giác.



Liu Hui

Trong bộ sách "Phép làm toán" Diophantus đã đưa ra các bộ ba số tam giác (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (20, 21, 29), ... và cũng đã tìm được (12-2). Sau đó ông tìm được cách sau đây : Nếu m và n là các số nguyên dương mà $\sqrt{2mn}$ có thể thực hiện được thì

$$\left. \begin{aligned} x &= m + \sqrt{2mn} ; \\ y &= n + \sqrt{2mn} ; \\ z &= m + n + \sqrt{2mn} . \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

Dùng công thức (12-9) ta có thể tìm được tất cả các bộ ba số tam giác (hay tất cả các nghiệm của phương trình (12-1)) ; Một số bộ ba số tam giác trong số đó như bảng 12-3.

Bảng 12-3

Một số bộ ba số tam giác tìm được theo (12-9)

m	n	$x^2 + y^2 = z^2$
1	2	$3^2 + 4^2 = 5^2$
1	8	$5^2 + 12^2 = 13^2$
2	4	$6^2 + 8^2 = 10^2$
1	18	$7^2 + 24^2 = 25^2$

2	9	$8^2 + 15^2 = 17^2$
3	6	$9^2 + 12^2 = 15^2$
1	32	$9^2 + 40^2 = 41^2$
2	16	$10^2 + 24^2 = 26^2$
...	...	...

13. NƯỚC PHÁP VÀ NƯỚC ĐỨC ĐỀU TREO GIẢI THƯỞNG

Phương trình (12-1) chỉ là trường hợp riêng khi $n = 2$ của phương trình tổng quát

$$x^n + y^n = z^n, \quad (13-1)$$

trong đó n là số nguyên dương.

Phương trình (13-1) được rất nhiều nhà toán học nghiên cứu.

Năm 1621, nhà toán học thiên tài, nổi tiếng nhất châu Âu thế kỉ XVII, Pierre de Fermat (Phecma) (3.8.1601 - 15.1.1665) người Pháp đã mua được bộ sách "Phép làm toán" của Diophantus ở cửa hàng sách Paris bằng tiếng Latinh. Bộ sách này đã gây sự hấp dẫn đặc biệt đối với ông. Hơn 10 năm sau đó, ông thường xuyên đọc đi đọc lại bộ sách này và mỗi lần đọc ông đều có những lời bình phẩm ghi bên lề sách.



P. de Fermat

P.de Fermat rất có sở trường nêu vấn đề, có nhiều cống hiến trong nhiều lĩnh vực. Ông vốn là quan tòa, chỉ làm toán như một thú vui, hơn nữa thời đó chưa có các tạp chí toán học, nên nhiều tác phẩm của ông được tập hợp lại từ các sách mà ông đã đọc và ghi chép bên lề sách. Đến năm 1665, ông ốm chết, chỉ lưu lại nhiều bản thảo và ghi chép. Năm 1670, khi sắp xếp lại các tài liệu còn lại của ông, con ông đã tình cờ phát hiện được một đoạn chú thích bằng tiếng Latinh của ông viết năm 1637 : "Biểu thị lập phương (lũy thừa 3) của một số nguyên dương thành tổng lập phương của hai số nguyên dương ; biểu thị lũy thừa 4 (mũ 4) của một số nguyên dương thành tổng lũy thừa 4 của hai số nguyên dương ; hoặc nói chung là biểu thị lũy thừa nguyên dương lớn hơn 2 (số mũ nguyên dương lớn hơn 2) của một số nguyên dương thành tổng lũy thừa cùng bậc (cùng số mũ) của hai số nguyên dương là điều không thể được. Tôi tin rằng có thể tìm được một chứng minh rất đáng ngạc nhiên, nhưng vì lề sách quá chật, tôi không làm sao viết ra được".

Đoạn chú thích này được P.de Fermat viết bên lề tập II, quyển 8 của bộ sách "Phép làm toán". Chúng ta có thể viết điều này đơn giản như sau :

"Khi số mũ $n \geq 3$ thì phương trình vô định (13-1) không thể có nghiệm nguyên dương được".

Đây là "định lí Fermat" nổi tiếng và thường được gọi là "định lí lớn Fermat" (để phân biệt với "định lí nhỏ Fermat") hay "định lí cuối cùng của Fermat". Đáng lẽ phán đoán này phải được chứng minh mới gọi là định lí được nhưng người ta quen gọi đây là định lí và cũng không ai thấy cần phải cải chính nữa.

"Định lí lớn Fermat" đã gây sự chú ý của nhiều người. Con của ông đã cố tìm kiếm kho tài liệu của ông, hi vọng tìm được cách chứng minh định lí này, nhưng cuối cùng vẫn không sao tìm được. Nhiều nhà toán học nổi tiếng cũng đã tìm cách chứng

minh "định lí lớn Fermat" nhưng đều không thành công. Sau hàng loạt thất bại và mất thời gian, người ta bắt đầu ngờ vực, cho rằng liệu có phải P. de Fermat đã chứng minh được định lí này hay không ?

Việc P. de Fermat đã chứng minh được "định lí lớn Fermat" hay không thì chẳng bao giờ chúng ta biết được, chỉ biết rằng, từ khi ông viết lên lề sách (năm 1637) đến khi ông mất (năm 1665), không khi nào ông nói thêm điều gì nữa về định lí này. Nhưng chính ông đã sử dụng phương pháp tài tình mà ông gọi là "phương pháp giảm vô hạn" để chỉ ra rằng, với $n = 3$ và $n = 4$ thì không tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $(13 - 1)$.

Sau khi P. de Fermat qua đời, rất nhiều nhà toán học đã dành cả cuộc đời để cố chứng minh "định lí lớn Fermat".

Bước đột phá đầu tiên là vào năm 1770, nhà toán học L. Euler đã chứng minh thành công khi số mũ $n = 3$ và $n = 4$ thì "định lí lớn Fermat" đúng.

Năm 1816 Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã treo giải thưởng cho bất cứ ai chứng minh được "định lí lớn Fermat".

Mãi đến năm 1823, nhà toán học Adrien Marie Legendre (18.9.1752 - 10.1.1833) người Pháp và năm 1828 nhà toán học

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13.2.1805 - 5.5.1859) người Phổ đã chứng minh được rằng, không có bộ ba số nguyên dương nào thỏa mãn $(13-1)$ với số mũ $n = 5$.



A.M. Legendre

Sophie Germain (1776 - 1831), một phụ nữ Pháp tự học thành tài (có lúc mang tên "Ngài Leblanc") đã nêu ra định lí (về sau mang tên bà) : "Nếu nghiệm của $(13-1)$ với $n = 5$ tồn tại thì cả x, y, z phải chia hết

cho 5". Năm 1831 bà lại đưa ra định lí khác cho phép chứng minh (13-1) với các trường hợp x, y, z không chia hết cho 5, khi n là các số nguyên tố nhỏ hơn 100.

Sự gợi ý của bà S. Germain đã giúp các nhà toán học tìm được điều kiện cho "định lí lớn Fermat", ví dụ nếu có thêm điều kiện $n \geq z$ thì sẽ dễ dàng chứng minh được "định lí lớn Fermat", dễ như học sinh làm bài tập. Như vậy, nếu $n \geq z > y \geq x$ thì

$$z^n - y^n = (z - y) \left(z^{n-1} + z^{n-2}y + z^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1} \right) > 1 \cdot nx^{n-1} > x^n. \quad (13-2)$$

Từ (13-2) ta có :

$$x^n + y^n < z^n. \quad (13-3)$$

Từ (13-3) thấy "định lí lớn Fermat" là đúng (vì (13-3) khác (13-1)).

Năm 1840 một người Pháp đã chứng minh được rằng, khi số mũ $n = 7$ thì "định lí lớn Fermat" vẫn đúng.

Năm 1849 Ernst Eduard Kummer (1810 - 1893) đã chứng minh "định lí lớn Fermat" với n là các số nguyên tố "đặc biệt" nhỏ hơn 100, nhờ đó những năm 1850 định lí này được chứng minh là đúng với tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn 100.

Năm 1850 và năm 1853, Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã hai lần tuyên bố treo giải thưởng huy chương vàng và 300000 frăng cho ai tìm ra được cách chứng minh "định lí lớn Fermat". Điều này đã kích thích bước phát triển trong quá trình tìm kiếm, số mũ n đã từ 100 lên đến 216.



D.Hilbert

Năm 1900, tại Hội nghị Toán học quốc tế lần thứ hai ở Paris, nhà toán học nổi tiếng David Hilbert (23.1. 1862 - 14.2.1943) người Đức với con mắt nhìn xa trông rộng, ông đã nêu ra 23 vấn đề nan giải cần "công phá". Đây là các bài toán hóc búa nhất và chưa giải được, trong đó có việc chứng minh "định lí lớn Fermat".

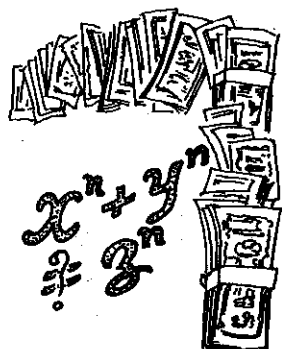
Để động viên mọi người, năm 1908, Viện Khoa học Göttingen của Đức đã treo giải thưởng Wolfskehl 10 vạn DM cho ai chứng minh đầy đủ được "định lí lớn Fermat". Giải thưởng này kéo dài 100 năm.

Nhờ kĩ thuật máy tính điện tử phát triển nên đã đưa số mũ n trong "định lí lớn Fermat" từ 216 lên đến 1 triệu (năm 1983) và 4 triệu (năm 1992). Gần đây các giáo sư Trường đại học California (Mỹ) đã đưa n lên 41 triệu. Cho dù như vậy, vẫn còn cách xa so với yêu cầu đã nêu ra.

"Định lí lớn Fermat" là đúng hay sai, cho đến gần đây người ta vẫn còn nghi ngờ. Nhưng muốn đưa điều gì để phủ định thì còn khó hơn là đi chứng minh định lí đó.

Mãi đến năm 1995, tức là 358 năm sau khi "định lí lớn Fermat" xuất hiện, nhà toán học Andrew Wiler mới chứng minh

hoàn chỉnh định lí này. A. Wiler sinh tại Cambridge (Anh). Năm 10 tuổi ông đã đọc sách có nói về "định lí lớn Fermat" và muốn chứng minh định lí này. Khi làm nghiên cứu sinh tiến sĩ, ông lại chọn đề tài này nhưng giáo sư John Coates hướng dẫn đề tài phải ngừng mơ ước này của A. Wiler vì J. Coater biết rằng "định lí lớn Fermat" cực kì huyền bí, đã thu hút những bộ óc siêu việt nhất



thế giới đi tìm lời giải đã gần 350 năm mà vẫn chưa thành công. Sau khi A. Wiles nhận bằng tiến sĩ tại Trường Đại học Tổng hợp Cambridge, được giảng dạy ở Khoa Toán của Trường Đại học Tổng hợp Princeton (Mỹ) mới có điều kiện thực hiện mơ ước của mình : chứng minh "định lí lớn Fermat".

Thứ tư, ngày 23-6-1993, A. Wiles đã trình bày chứng minh "định lí lớn Fermat" trong hội nghị về lí thuyết số ở Cambridge với bài viết đầy đủ dài 200 trang. A. Wiles đã chứng minh được đường cong Frei không tồn tại, tức là không tồn tại nghiệm của $(13-1)$ với $n > 2$. Như vậy "định lí lớn Fermat" được chứng minh. Nhưng sau đó, Kenneth A. Ribet đã nghi ngờ, vì A. Wiles không dùng "hệ thống Euler" và rồi giáo sư Nick Katz - một trong số các chuyên gia được chọn làm phản biện - đã dành trọn hai tháng 7 và 8 - 1993 tập trung xem xét chứng minh của A. Wiles cũng phát hiện ra điều K. A. Ribet nghi ngờ. Bởi vì, không có "hệ thống Euler" (cái được xem như tổng quát hóa công trình của Matthias Flach người Nga và Colivagin người Nga) thì không có "công thức lớp số" và như vậy không thể "đếm" các biểu diễn Galois, tức là "giả thiết Shimura - Taniyama" chưa được chứng minh. Giả thiết này là then chốt để chứng minh "định lí lớn Fermat".

Ngày 19-9-1994 A. Wiles đã phát hiện ra chỗ hổng của mình và tiếp tục hoàn thiện chứng minh "định lí lớn Fermat".

Tạp chí "The Annals of Mathematics" số tháng 5-1995 đã đăng nguyên văn báo cáo hoàn chỉnh của A. Wiles. Đến đây "định lí lớn Fermat" đã hoàn toàn được chứng minh.

Chính nhờ sự kết hợp các chuyên ngành toán học và sự liên kết của các phần trong các chuyên ngành khác nhau, sau nhiều thế kỉ đã mở đường cho công trình chứng minh "định lí lớn Fermat" của A. Wiles.

Việc chứng minh "định lí lớn Fermat" không phải công lao chỉ của A. Wiles. đương nhiên ông là người đáng ca ngợi nhất, nhưng vinh quang này còn thuộc về cả K. A. Ribet, Barry Mazur, Goro Shimura người Nhật Bản, Yutaka Taniyama (12.11.1927 – 17.11.1958) người Nhật Bản, Gerhard Frey, người Đức, ...

Chứng minh của A. Wiles rất phức tạp và hiện đại, nhưng điều này không đồng nghĩa với việc không thể tồn tại một chứng minh đơn giản hơn. Chúng ta vẫn hi vọng ai đó có được chứng minh như vậy.

14. DÙNG PHƯƠNG TRÌNH GIẢI VÀI BÀI TOÁN CỔ

a) Bài toán cổ Việt Nam

"Vừa gà, vừa chó,
Bó lại cho tròn.
Ba mươi sáu con,
Một trăm chân chẵn.
Hỏi có mấy gà, mấy chó ?".

Bài toán đã được giải ở "Đại số 8" với phương trình

$$2x + 4(36 - x) = 100. \quad (14-1)$$

Giải (14-1) được $x = 22$ (gà) và 14 con chó.

b) Bài toán "chiếc vương miện"

Bài toán này đã nói trong "Vụ án chiếc vương miện" (mục 1). Để xác định trong chiếc vương miện có bao nhiêu bạc, G. Galilei

đã dùng "Chiếc cân nhỏ" đã nói ở mục 9. Bây giờ chúng ta sẽ tìm lượng bạc bằng cách khác.

Giả sử vương miện nặng W_G được làm bằng u vàng và v bạc. Nếu đưa W_G vàng ròng (vàng nguyên chất) cân trong nước thì sẽ nhẹ mất f_1 , tương tự với W_G bạc cân trong nước sẽ nhẹ mất f_2 , đưa vương miện cân trong nước sẽ nhẹ mất f . Người ta đã chứng minh được rằng :

$$\frac{u}{v} = \frac{f_2 - f}{f - f_1} \quad (14-2)$$

Giả sử vương miện thả vào nước chiếm thể tích V_G . Nếu đưa cục vàng ròng và cục bạc cùng trọng lượng với vương miện thì khi thả vào nước sẽ chiếm thể tích là V_g và V_s . Người ta cũng đã chứng minh được rằng :

$$\frac{u}{v} = \frac{V_s - V_k}{V_k - V_g} \quad (14-3)$$

Như vậy ta đã có thêm hai cách nữa để tìm số bạc có trong vương miện.

Bây giờ ta làm một ví dụ cụ thể. Giả sử chiếc vương miện có trọng lượng 5 Niuton (500g). Cân vương miện trong nước thấy giảm 0,3N. Lấy 500g vàng ròng cân trong nước thấy giảm 0,25N. Lấy 500g bạc cân trong nước thấy giảm 0,5N.

Để cho tiện theo dõi, ta thay hai ẩn u và v là x và y. Theo trên ta có : $W_k = 5$; $f = 0,3$; $f_1 = 0,25$ và $f_2 = 0,5$. Thay vào các biểu thức (9-4) và (14-2) ta có :

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 5 ; \\ \frac{x}{y} &= \frac{0,5 - 0,3}{0,3 - 0,25} \end{aligned} \right\} \quad (14-4)$$

Giải hệ phương trình bậc 1 hai ẩn (14-4) ta được :

$$\begin{aligned} x &= 4 \text{ (400g)} ; \\ y &= 1 \text{ (100g)}. \end{aligned}$$

Vậy trong vương miện có 400g vàng và 100g bạc.

c) Bài toán của Mahāvira

Khoảng năm 850, Mahāvira người Ấn Độ đã đưa ra bài toán dưới dạng đoạn văn tả cảnh với nội dung toán học tóm tắt như sau : Một đoàn lữ hành 23 người vào rừng nghỉ. Họ hái được 63 đồng chuối lá (chuối rừng) bằng nhau và nếu thêm 7 quả nữa thì chia đều cho từng người sẽ đủ (không dư quả nào). Hỏi số quả ít nhất của đồng chuối ?

Nếu ta đặt x là số quả chuối của mỗi đồng và y là số quả chuối mỗi người được chia thì ta có :

$$63x + 7 = 23y. \quad (14-5)$$



Đây là phương trình vô định bậc 1 hai ẩn. Trước khi giải ta cần thấy rằng, x và y phải là dương và nguyên.

Từ (14-5) ta có :

$$x = \frac{23y - 7}{63} \quad (14-6)$$

Vì $x \geq 1$ nên từ (14-6) ta tìm được $y \geq 4$.

Từ đó ta giải được nghiệm nhỏ nhất thỏa mãn đầu bài $x = 5$, lúc đó $y = 14$.

d) Bài toán "chàng cầm đi mua thịt"

Trong bộ sách "Sách toán chín chương" có loại "bài toán thừa - thiếu", ví dụ : Có một số người góp tiền mua hàng, nếu :

mỗi người góp 8đ thì thừa 3 đ,

mỗi người góp 7đ thì thiếu 4đ.

Hỏi có mấy người góp tiền và số tiền cần là bao nhiêu ?

Với trình độ trung học đã học đại số thì việc giải loại bài toán này sẽ dễ dàng tìm được 7 người và 53đ, nhưng đối với người Cổ Đại chưa biết đến đại số thì họ giải như thế nào ?

Các bạn thử nghĩ xem !



Bài toán "chàng cầm đi mua thịt" cũng thuộc loại "bài toán thừa - thiếu" nhưng lí thú hơn. Có chàng cầm đi mua thịt, không nói được mình có bao nhiêu tiền, chỉ biết rằng nếu dùng số tiền đó để mua 16 lạng thịt thì thiếu 40đ, còn nếu chỉ mua 9 lạng thịt thì thừa 16đ. Vậy

chàng có bao nhiêu tiền và có thể mua được mấy lạng thịt ?

Nếu đặt x là số thịt mua được,

y là giá tiền mỗi lạng thịt,

z là số tiền chàng có,

thì ta có : $xy - z = 0.$ (14-7)

Từ (14-7) ta được :

$$x = \frac{z}{y}. \quad (14-8)$$

Vì x, y, z đều chưa biết nên người xưa đã mất hàng nghìn năm không giải được. Cuối cùng họ đã dùng hai phép thử :

Theo điều kiện đề ra, ta có :

$$z = 12y - 40 ; \quad (14-9)$$

$$z = 9y + 16. \quad (14-10)$$

Từ (14-9) và (14-10) ta được :

$$7y = 56,$$

tức là $y = \frac{56}{7} = 8. \quad (14-11)$

Thay (14-11) vào (14-10) ta được :

$$z = 9 \cdot 8 + 16 = 88. \quad (14-12)$$

Từ (14-12) và (14-8) ta có :

$$x = \frac{88}{8} = 11.$$

Ngày nay ta có thể giải "bài toán thừa- thiếu" như sau :

Lần 1, nếu mua a_1 lạng thịt thì thiếu b_1 đ,

lần 2, nếu mua a_2 lạng thịt thì thừa b_2 đ.

Ta có :

$$z = a_1 y - b_1 ; \quad (14-13)$$

$$z = a_2 y + b_2. \quad (14-14)$$

Trừ (14-14) cho (14-13) :

$$y (a_1 - a_2) = b_1 + b_2. \quad (14-15)$$

Vậy :

$$y = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}. \quad (14-16)$$

Đồng thời ta tính được :

$$x = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 - a_2} \quad (14-17)$$

Từ (14-17), (14-16) và (14-8) ta được :

$$x = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{b_1 + b_2} \quad (14-18)$$

Từ (14-17) và (14-18) ta tính được số tiền chàng có và số thịt chàng mua được :

$$z = \frac{9 \cdot 40 + 16 \cdot 16}{16 - 9} = 88(\text{đ}) ;$$

$$x = \frac{9 \cdot 40 + 16 \cdot 16}{40 + 16} = 11(\text{lạng}).$$

Đối với bài toán "góp tiền", từ (14-16) và (14-17) ta tính được số người góp tiền và số tiền cần :

$$y = \frac{3 + 4}{8 - 7} = 7(\text{người}) ;$$

$$z = \frac{7 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{8 - 7} = 53(\text{đ}).$$

Bài toán "thừa - thiếu" là thành tựu xuất sắc về số học của người Trung Hoa cổ đại. Phải tới hơn 1000 năm sau trong các sách của Ả-rập mới xuất hiện bài toán này và gọi cách giải trên đây là "phép toán Khiết Đan" hay "bài toán cổ Khiết Đan" (họ gọi Trung Hoa là Khiết Đan).

Ở châu Âu thời Trung Cổ đã giải bài toán này bằng cách đưa ra "giả thiết kép" là phép giải cũng có nguồn gốc như cách giải thời Cổ Đại ở Trung Hoa đã nêu ở trên.

e) Bài toán "hòa thượng ăn bánh bao"

Bài toán như sau : Đại hòa thượng mỗi người ăn 3 bánh bao, tiểu hòa thượng ba người ăn 1 bánh bao, có một trăm hòa thượng ăn hết 100 bánh bao.

Hỏi có bao nhiêu đại hòa thượng, tiểu hòa thượng ?

Đây là bài toán có thể lập thành hệ phương trình vô định bậc 1 hai ẩn, việc giải không có gì khó, nhưng nếu chỉ cho dùng phương pháp số học thì khá rắc rối, tất cả phải dựa vào "mẹo". Các bạn thử xem, kết quả là có 25 đại hòa thượng và 75 tiểu hòa thượng.

g) Bài toán "100 con gà"

Cần phải nói trước bài toán này là bài toán "Bách kê thuật" với nội dung là đưa 100đ mua 100 con gà, hay nói gọn hơn là bài toán "100 con gà", chứ không phải "Bách kê yến" là một tình tiết trong vở kịch "Dùng mưu chiếm Uy Hồ Sơn" với nội dung là Tọa Sơn Điều đã tổ chức bữa tiệc 100 con gà để thực khách mặc tình ăn uống.

Bài toán "Bách kê thuật" như sau : Đưa 100đ mua 100 con gà,
gà trống giá 5đ một con,
gà mái giá 3đ một con,
gà con giá $\frac{1}{3}$ đ một con.

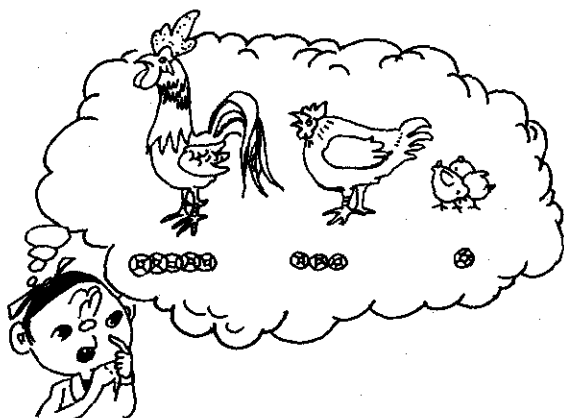
Hỏi số gà mua được mỗi loại ?

Đây là bài toán cổ khó, xuất hiện vào thế kỉ V trong sách "Trương Khâu Kiện toán kinh", về sau truyền đến Ấn Độ, Ai Cập, các nước Ả-rập, rồi Italia và châu Âu. Như vậy nó đã có cống hiến lớn trong giao lưu văn hóa.

Mới nhìn qua thì thấy bài toán này hơi giống bài toán "hòa thượng ăn bánh bao" nhưng thực tế lại hoàn

toàn khác. Bài toán "hòa thượng ăn bánh bao" đơn giản hơn.

Ở thế kỉ V người ta đã giải được là (4, 18, 78), (8, 11, 81) và (12, 4, 84). Ta thấy rằng cứ tăng số gà trống lên 4 con thì



phải giảm số gà mái 7 con và tăng số gà con lên 3 con và số tiền vẫn 100 đ. Tiếc rằng trong sách cổ không nêu cách giải, do đó người đời sau đã phải tìm cách giải.

Có người cho rằng, người xưa đã làm như sau : Trước tiên không mua gà trống. Lúc này bài toán chỉ còn hai ẩn như bài toán "hòa thượng ăn bánh bao", tức là mua được 25 gà mái và 75 gà con.

Bây giờ ta có mua gà trống thì phải giảm gà mái nhưng phải kết hợp tăng hoặc giảm gà con thì mới thích ứng giữa gà và tiền. Như vậy phải tăng số gà trống tương đương với việc giảm gà mái và gà con tương đương.

Chỉ cần qua một số lần thử, ta có thể tìm thấy tỉ lệ tăng - giảm sẽ là : Khi tăng 4 gà trống và 3 gà con thì phải giảm tương ứng 7 gà mái :

$$4 \cdot 5 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 7 \cdot 3 = 21.$$

Tiến hành thử nhiều lần ta được kết quả :

Gà trống	Gà mái	Gà con
$0 + 4 = 4$	$25 - 7 = 18$	$75 + 3 = 78$
$0 + 4 \cdot 2 = 8$	$25 - 7 \cdot 2 = 11$	$75 + 3 \cdot 2 = 81$
$0 + 4 \cdot 3 = 12$	$25 - 7 \cdot 3 = 4$	$75 + 3 \cdot 3 = 84$

Ngày nay người ta đã có nhiều cách để giải bài toán này, đa số là dùng phương pháp đại số, tức là dùng hệ phương trình nhiều ẩn. Đặt :

x là số gà trống,

y là số gà mái ,

z là số gà con.

Ta có :

$$x + y + z = 100 ; \quad (14-19)$$

$$5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 . \quad (14-20)$$

Đây là hệ phương trình vô định bậc 1 ba ẩn.

Từ (14-19) ta có :

$$z = 100 - x - y. \quad (14-21)$$

Thay (14-21) vào (14-20) ta được :

$$7x + 4y = 100. \quad (14-22)$$

Từ (14-22) ta thấy $4y$ và 100 đều là bội số của 4 , đồng thời số gà mỗi loại phải là số nguyên dương, tức là $1 \leq x \leq 14$ và $1 \leq y \leq 25$.

Từ (14-22) ta có :

$$7x = 4(25 - y).$$

Như vậy x cũng phải là bội số của 4 .

Do đó x chỉ có thể là $4, 8$ hoặc 12 .

Từ (14-22) và (14-21) ta tính được y và z . Kết quả như sau :

$$x = 4 ; 8 ; 12$$

$$y = 18 ; 11 ; 4$$

$$z = 78 ; 81 ; 84.$$

h) Bài toán P. de T. da Coi đề nghị G.Cardano giải

Năm 1540 P. de T. da Coi đã đề nghị G.Cardano giải bài toán sau đây : Chia 10 thành ba phần sao cho chúng là một dãy các tỉ lệ thức và tích của hai số đầu tiên bằng 6 .

Nếu ba phần đó được kí hiệu là x, y, z , ta có :

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 10; \\ zy &= y^2; \\ xy &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (14-23)$$

Đây là hệ phương trình bậc 2 ba ẩn.

G.Cardano đã không giải được bài toán này nhưng chính khi tìm cách giải (14-23) mà học trò của ông là L. Ferrari đã tìm ra phương pháp chung để giải phương trình bậc 4.

L.Ferrari đã khử x, z trong (14-23) để được

$$y^4 + 6y^2 - 60y + 36 = 0. \quad (14-24)$$

Đây chính là phương trình bậc 4 một ẩn mà ta đã biết cách giải ở mục 7.

15. PHÁT HIỆN ĐẦU TIÊN VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Để lấp một khoảng trống trong khoa học có khi cần một thời gian đến hàng thế kỉ, nhưng cũng có khi chỉ mất một thời gian tác gang.

Bây giờ chúng ta nói về sự kết hợp giữa đại số và hình học. Sự kết hợp này có vẻ như chỉ qua một giấc mơ.

Trước thế kỉ XVII người ta đã sử dụng những phương pháp khác nhau về đại số và hình học như là hai nhánh của toán học. Nhiều người nghiên cứu "số" trong đại số và "hình" trong hình học, coi như hai việc hoàn toàn khác nhau.

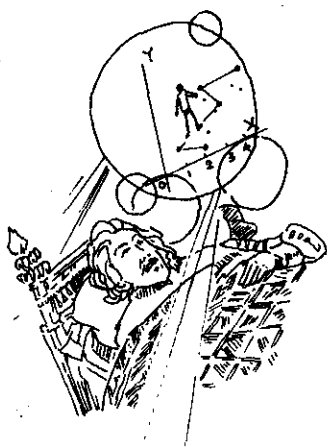
Năm 1619, một sĩ quan quân đội trẻ tuổi đầy tài năng đã hết sức vui mừng khi ông đã tìm được sự kết hợp giữa đại số và hình học. Lúc đó quân đội đóng quân rải rác ở nhiều thị trấn ven sông. Trời trong xanh, thảo nguyên xanh rờn, những mảnh sao băng cắt ngang bầu trời đêm, đàn tuần mã băng băng trên đồng cỏ. Tất cả những cảnh tượng đó đã làm cho chàng sĩ quan liên tưởng, suy nghĩ làm thế nào để mô tả con đường vận động của con tuần mã và đường sao băng. Đêm 10 tháng 11 năm đó, chàng sĩ quan trẻ tuổi này nằm trên giường nhưng trần trọc không sao ngủ được. Bỗng nhiên có một con nhện sa qua tấm mắt của ông. Con nhện rơi từ từ tạo thành một đường cong. Trong chốc lát đó, ông nghĩ : con nhện và điểm, hình và số, nhanh và chậm, động và tĩnh,... Có khi ông mơ hồ như thấy mình đã sờ được điều bí mật giữa chúng, nhưng lại thấy lan man không mô tả được. Một hôm ông lại thiếp đi.

Tục ngữ có câu :

"Ban ngày là suy nghĩ,
Ban đêm là giấc mộng".

Có khi, có những vấn đề ban ngày suy nghĩ không ra, giấc mộng ban đêm lại gợi mở cho người ta điều gì đó. Trong đêm

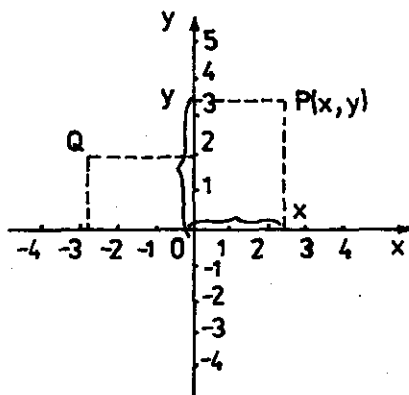
đó, một linh cảm vĩ đại đã xuất hiện trong mơ. Sau đó mấy hôm, chàng sĩ quan này đã xâu chuỗi tất cả những gì mà mình đã phát hiện được lại. Ông đã tìm được một phương pháp có thể chuyển ngôn ngữ của hình học ra ngôn ngữ của đại số. Từ đó có thể đưa mọi vấn đề của hình học quy vào đại số để giải. Đó chính là điều mà ngày nay người ta gọi là phương pháp hình học giải tích hoặc nói vắn tắt là *phương pháp giải tích*. Sáng tạo ra phương pháp này là nhà toán học René Descartes (31.3.1596 - 11.1.1650) người Pháp.



R. Descartes

Vậy R. Descartes đã chuyển ngôn ngữ hình học ra đại số như thế nào ? Điều này nhiều người đã quen thuộc, đó là : Vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau trên mặt phẳng làm trục. Đường nằm ngang gọi là trục hoành, đường thẳng đứng gọi là trục tung. Giao điểm gọi là điểm gốc O. Thế là một điểm P bất kì trên mặt phẳng đều có thể xác định bởi khoảng cách của nó với hai trục. Khoảng cách từ điểm P đến

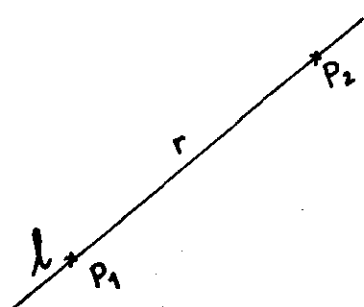
trục tung gọi là hoành độ, thường được biểu thị bằng x . Khoảng cách từ điểm P đến trục hoành gọi là tung độ, thường được biểu thị bằng y (hình 15-1). Sau đó có thể liệt kê bảng chuyển từ hình học sang đại số như sau (bảng 15-1) :



Hình 15-1

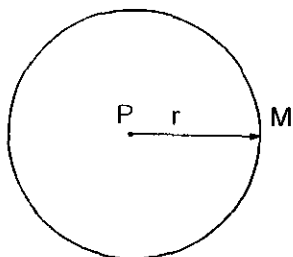
Bảng 15-1

Chuyển hình học ra đại số

Hình học	Đại số
1. Điểm P 2. Qua hai điểm P_1 và P_2 đã biết có thể vẽ đường thẳng l:  3. Đoạn thẳng có thể kéo dài thành đường thẳng.	1. Tọa độ $P(x, y)$ 2. Với hai điểm $P_1(x_1, y_1)$ và $P_2(x_2, y_2)$ đã biết có thể lập phương trình bậc 1 hai ẩn : $ax + by + c = 0, \quad (15-1)$ thỏa mãn $ax_1 + by_1 + c = 0 ;$ $ax_2 + by_2 + c = 0.$ Ta có : $a = y_1 - y_2 ;$ $b = x_2 - x_1 ;$ $c = x_1 y_2 - x_2 y_1.$ 3. Trong (15-1) : $x \in R, y \in R, R \text{ là nhóm số thực .}$

4. Độ dài đoạn thẳng P_1P_2 là r .

5. Lấy P làm tâm, r làm bán kính, có thể vẽ đường tròn :



4. Ta có :

$$r = |P_1P_2|$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (15-2)$$

5. Khi tọa độ điểm P đã biết là (m, n) và khoảng cách r đã biết (hình 15-2) thì có thể viết được phương trình

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

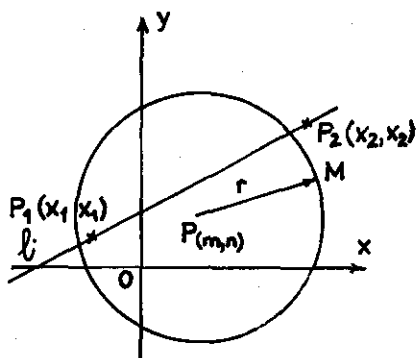
hoặc khai triển thành

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0, \quad (15-3)$$

trong đó $d = -2m$, $e = -2n$,
 $f = m^2 + n^2 - r^2$,

...

Dựa vào bảng 15-1 R.Descartes đã chuyển được tất cả những vấn đề hình học ra đại số, từ đó có thể sử dụng kĩ xảo đại số để biến những vấn đề hình học khó khăn thành dễ dàng. Ở mục 16 chúng ta sẽ thấy phương pháp tọa độ có giá trị to lớn như thế nào trong việc giải quyết ba vấn đề nổi tiếng của hình học cổ điển.



Hình 15-2

Ngày 30-3-1596 R.Descartes ra đời tại một thị trấn nhỏ của nước Pháp. Từ bé ông đã hưởng một nền giáo dục rất tốt.

Năm 1616 ông tốt nghiệp đại học. Lúc đầu ông làm luật sư ở Paris. Đến năm sau ông được phong là công tước và giữ một chức quan văn trong quân đội. Có lần, quân đội tấn công vào miền Nam Hà Lan, một cơ hội ngẫu nhiên, ông đã giải quyết thành công một việc nan giải của toán học do yêu cầu của quân sự và từ đó ông đã bước dần vào lĩnh vực toán học. Từ năm 1619 ông bắt đầu nghiên cứu hình học giải tích, triết học và vật lý học.

Tháng 10 năm 1649 ông được Nữ hoàng Thụy Điển mời sang giảng dạy triết học. Nữ hoàng trẻ tuổi tính khí ngang tàng bắt ông phải giảng triết học cho bà từ 5 giờ sáng hàng ngày. Thời tiết Bắc Âu giá rét thấu xương, R.Descartes không chịu đựng nổi nên bị viêm phổi ngày càng nặng. Ông đã từ trần ngày 11-1-1650 tại Stockhom.

Thành tựu toán học chủ yếu của R.Descartes được tập hợp trong cuốn "Phương pháp luận" xuất bản năm 1637.

Có những ý kiến khác nhau về việc kết luận ai là người đã sáng tạo ra phương pháp giải tích.

Những người Hi Lạp cổ đại đã rất ham thích phương pháp giải tích và mọi người đã biết khá rõ là tọa độ đã được người Ai Cập và La Mã sử dụng trong trắc địa, người Hi Lạp dùng trong việc vẽ bản đồ.

Ở thế kỉ XIV Nicole Oresme đã thể hiện một khía cạnh khác của phương pháp giải tích. Ông biểu thị một số các quy luật bằng cách vẽ biểu đồ.

Tuy vậy, trước khi phương pháp giải tích có được giá trị thực tiễn cao như hiện nay, nó đã phải chờ đợi sự phát triển của hệ kí hiệu đại số, do đó hầu hết các sử gia đều cho rằng hai nhà toán học Pháp R.Descartes và P.de Fermat đã đóng góp phần cốt lõi của phương pháp giải tích ít ra là tư tưởng hiện đại về chủ đề này.

Một truyền thuyết khác thì giống như chuyện Isaac Newton khi nhìn quả táo rơi đã phát hiện ra định luật vạn vật hấp dẫn. R.Descartes đã thấy một con ruồi bò trên trần nhà, gần phía góc, ông đã nghĩ rằng đường đi của con ruồi có thể mô tả được nếu biết mối liên hệ giữa các đoạn thẳng nối từ con ruồi đó đến hai bức tường kề nhau.

Mặc dù xuất xứ như thế nào, nhưng R.Descartes đã để lại cho nhân loại những đóng góp lớn về phương pháp giải tích.

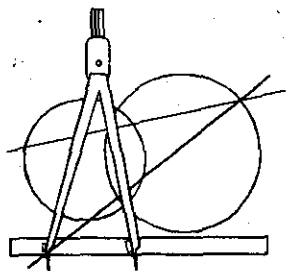
Ngoài hệ tọa độ R.Descartes vừa nêu ở trên, còn có các hệ tọa độ phẳng khác như hệ tọa độ xiên góc và hệ tọa độ cực. Hệ tọa độ cực có thể do Jakob Bernouilli đưa ra năm 1691.

16. VÉN BỨC MÀN BÍ ẨN CỦA BA BÀI TOÁN CỔ ĐIỂN NỔI TIẾNG VỀ HÌNH HỌC

Ba bài toán cổ điển nổi tiếng về hình học hay ba bài toán cổ điển nổi tiếng, đó là đưa cho bạn các dụng cụ *Euclid* và bằng các bước đi hữu hạn, liệu bạn có thể :

1. Chia một góc ra ba phần bằng nhau (vấn đề "chia ba một góc").
2. Dụng cạnh một khối lập phương mà thể tích của nó bằng hai lần thể tích của một khối lập phương đã biết (vấn đề "tăng đôi một khối lập phương").
3. Dụng một hình vuông mà diện tích của nó bằng diện tích của một hình tròn đã biết (vấn đề "cầu phương một hình tròn" hay vấn đề "biến tròn thành vuông").

Ba bài toán này có vẻ rất đơn giản nhưng thực ra nó đã vắt kiệt trí não của không ít nhà toán học, thu hút biết bao tinh lực, tâm huyết nhiều nhà toán học trẻ tuổi. Tuy vậy, nó đã khơi gợi sự tò mò và thích thú của biết bao thế hệ.



Hình 16-1

Ba vấn đề này xuất hiện khoảng thế kỉ VI trước Công nguyên. Điều cần lưu ý ở đây là, chỉ dùng các dụng cụ Euclid, tức là giới hạn bởi hai dụng cụ đơn giản là thước thẳng và compa (hình 16-1) :

- thước thẳng không chia đơn vị hoặc đánh dấu trên đó ;
- compa khác chút ít với compa ngày nay ;

đồng thời lại chỉ bằng một số bước dựng hữu hạn.

Với hai giới hạn này thì ba bài toán nêu trên trở thành rất khó khăn.

Đây là ba vấn đề mà lịch sử đã tốn biết bao giấy mực trong suốt 26 thế kỉ qua và các nhà toán học đã khẳng định rằng nếu chỉ dùng thước thẳng và compa thì không thể thực hiện được.

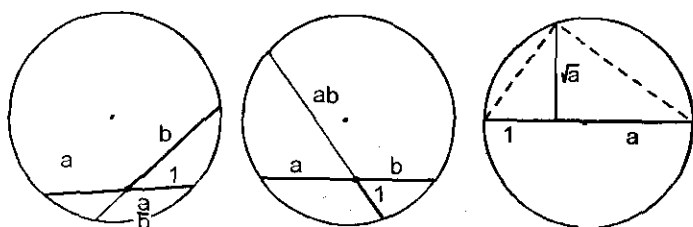
Các bạn trẻ ! Về kết luận trên đây, chắc chắn trong các bạn sẽ có người nghi ngờ. Bản thân các bạn chắc cũng muốn thử sức, nhưng chúng tôi chân thành khuyên các bạn : việc làm đó là vô ích, vì nó sẽ phí sức lực và thời gian của bạn mà thôi. Mong rằng bạn cứ tiếp tục đọc, nó sẽ giảng giải cho điều nghi ngờ này của bạn và việc làm đó còn có ích hơn.

Trước hết là bài toán chia một góc ra ba phần bằng nhau.

Trong ba bài toán vừa nêu ở trên thì ở Mĩ bài toán này được gọi là "bình dân nhất" và hàng năm các tạp chí toán học của các nước đã nhận được nhiều thông báo từ khắp nơi gửi đến nói rằng, đã có người giải được. Thường thì người ta cho rằng việc chia đôi một góc là quá dễ thì có sao lại không chia ba được !.

Chúng ta không nói là tất cả các góc đều không thể chia ba phần bằng nhau bằng thước thẳng và compa được. Thực tế có một số góc có thể làm được, như sẽ nói dưới đây. Nhưng nếu chúng ta có thể chỉ ra, có một góc không thể dùng thước thẳng và compa chia ra ba phần bằng nhau được thì nhiều người chưa tin.

Mấu chốt của bài toán là ở chỗ, thước thẳng và compa thực sự có khả năng đến đâu ? Những ai đã học hình học đều biết : nếu chúng ta xác định đơn vị dài là 1 thì có thể dùng thước thẳng và compa dựng được hai đoạn dài là a và b , $\frac{a}{b}$, ab và $\sqrt{a}$ như hình 16-2.



Hình 16-2

Ở mục 15 ta đã nói, việc xây dựng tọa độ R.Descartes đã làm cho vấn đề hình học có thể trở thành vấn đề của đại số. Trong thực tế, trên tọa độ mặt phẳng, đường thẳng và đường tròn được biểu thị bằng phương trình (15-1) và (15-3). Nếu đoạn thẳng nào có thể dùng thước thẳng và compa để vẽ ra thì hai đầu của đoạn thẳng đó tất nhiên sẽ là giao điểm giữa đường thẳng với đường thẳng hoặc giữa đường thẳng với đường tròn, hoặc giữa đường tròn với đường tròn, và tọa độ của nó phải được xác định bởi các hệ phương trình sau đây :

1. Đường thẳng giao với đường thẳng :

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16-1)$$

2. Đường thẳng giao với đường tròn :

$$\left. \begin{aligned} ax + by + c &= 0; \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16-2)$$

3. Đường tròn giao với đường tròn :

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 &= 0; \\ x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16-3)$$

Kiến thức đại số cho ta biết rằng, nghiệm của các hệ phương trình (16-1), (16-2) và (16-3) đều có thể biểu thị các hệ số nhờ các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và khai căn. Bởi vậy, nếu một đoạn thẳng có thể dựng được bằng thước thẳng và compa thì độ dài của nó phải biểu thị được qua các độ dài đã biết nhờ các phép toán nêu trên. Ngược lại, nếu độ dài một đoạn thẳng biểu thị được dưới dạng một biểu thức của các độ dài đã cho cùng với một số hữu hạn các phép toán nêu trên thì đoạn thẳng ấy có thể dựng được bằng thước thẳng và compa.

Bây giờ chúng ta quay lại với bài toán chia góc α làm ba phần bằng nhau. Vấn đề then chốt là làm thế nào để đưa vấn đề này quy về đại số. Nếu được thì góc α sẽ chia được làm ba phần bằng nhau, ngược lại, thì không chia được.

Để đưa bài toán chia một góc ra ba phần bằng nhau thành công việc của đại số, chúng ta phải dùng đến công thức

$$\cos x = 4\cos^3 \frac{x}{3} - 3\cos \frac{x}{3}. \quad (16-4)$$

Công thức (16-4) phải đến trung học mới học. Bạn đọc ở lớp dưới có thể chỉ cần công nhận.

Bây giờ ta đặt $\cos \alpha = s$, $\cos \frac{\alpha}{3} = x$ và thay vào (16-4) ta có :

$$s = 4x^3 - 3x. \quad (16-5)$$

Do góc α đã biết, cho nên s là số cố định. Ví dụ :

● Nếu $\alpha = 90^\circ$.

Ta có :

$$s = \cos 90^\circ = 0. \quad (16-6)$$

Thay (16-6) vào (16-5) ta được :

$$4x^3 - 3x = 0. \quad (16-7)$$

Giải (16-7) ta được :

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (16-8)$$

Đoạn thẳng và độ dài cho bởi công thức (16-8) có thể dựng được bằng thước thẳng và compa.

Vậy góc vuông ($\alpha = 90^\circ$) có thể chia được ra ba phần bằng nhau bằng thước thẳng và compa.

● Nếu $\alpha = 45^\circ$.

Ta có :
$$s = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (16-9)$$

Thay (16-9) vào (16-5) ta được :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0. \quad (16-10)$$

Giải (16-10) ta được :

$$x = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}). \quad (16-11)$$

Công thức (16-11) có thể thực hiện được .

Vậy góc $\alpha = 45^\circ$ cũng có thể chia được ra ba phần bằng nhau bằng thước thẳng và compa.

● Nếu $\alpha = 60^\circ$.

Ta có :

$$s = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \quad (16-12)$$

Thay (16-12) vào (16-5) ta được :

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \quad (16-13)$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng, nghiệm của (16-13) không thể là căn thức một tầng dạng $M + \sqrt{N}$. Tương tự, chúng ta cũng có thể chứng minh được nghiệm của (16-13) không thể là căn hai tầng, ba tầng, ... k tầng được. Nếu chúng ta hoàn thành được chứng minh này, chúng ta đã chứng minh được rằng không thể chia góc $\alpha = 60^\circ$ ra ba phần bằng nhau bằng thước thẳng và compa. Đây cũng là bài toán dựng một đa giác đều 9 cạnh.

Thực vậy, nếu phương trình có nghiệm dạng $M + \sqrt{N}$ thì thay vào (16-13) ta được :

$$8(M + \sqrt{N})^3 - 6(M + \sqrt{N}) - 1 = 0. \quad (16-14)$$

Sau khi khai triển, thu gọn (16-14) ta được :

$$\left. \begin{aligned} 8M^3 + 24MN - 6M - 1 &= 0; \\ 24M^2 + 8N - 6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16-15)$$

Điều này chứng tỏ $M - \sqrt{N}$ cũng là nghiệm của (16-13).

Ta lại có :

$$(x - M - \sqrt{N})(x - M + \sqrt{N}) = x^2 - 2Mx + (M^2 - N), \quad (16-16)$$

với các hệ số đều có nghĩa. Điều này không thể xảy ra. Từ đó ta chứng minh được là việc dùng thước thẳng và compa để chia góc $\alpha = 60^\circ$ ra làm ba phần bằng nhau là không thể thực hiện được.

Bây giờ chúng ta chuyển sang bài toán *dựng cạnh một khối lập phương mà thể tích của nó bằng hai lần thể tích của một khối lập phương đã biết*.

Vấn đề này từ xưa đã có một câu chuyện thần thoại thú vị. Từ thế kỉ V trước Công nguyên, ở Hi Lạp cổ đại, đã tràn lan một bệnh dịch. Delian được thần linh báo cho biết là để tránh được bệnh dịch thì phải tăng thể tích bệ thờ thần Apollo khối lập phương hiện có lên gấp đôi. Do vậy, vấn đề này còn gọi là "bài toán Delian".

Mới đầu mọi người cứ tưởng là đơn giản, chỉ việc mở rộng các cạnh của bệ thờ lên gấp đôi là được. Không ngờ, khi làm như vậy thì lập tức bị thần tức giận. Bệnh dịch lan tràn không sao kiểm soát được. Mọi người lại tể thần, nhận tội. Người ta đã nhận ra rằng, thể tích của bệ thờ mới không gấp đôi thể tích bệ thờ cũ.

Lại có bằng chứng cho rằng, bài toán này xuất phát từ lời nói của một nhà thơ ít tiếng tăm, không được học toán, người Hi Lạp cổ đại. Ông mô tả một ông vua thần thoại tên là Minos đã không vừa ý với kích thước của ngôi mộ con trai là Glaucus nên đã lệnh tăng gấp đôi thể tích ngôi mộ lên. Nhà thơ cho rằng, chỉ cần tăng đôi kích thước mỗi chiều là thể tích sẽ gấp đôi. Từ đó các nhà toán học đặt ra bài toán này.

Bài toán tăng đôi một khối lập phương thì không thể dùng thước thẳng và compa để thể hiện được ! Việc chứng minh bài toán này đơn giản hơn bài toán chia một góc ra ba phần bằng nhau.

Ta giả thiết cạnh của khối lập phương cũ là a và cạnh của khối lập phương mới là x thì ta có :

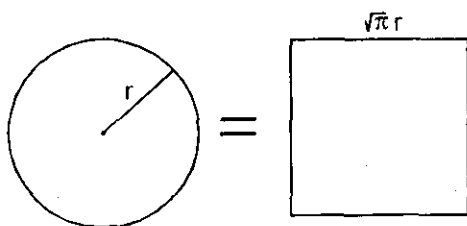
$$x^3 = a^3 + a^3 ,$$

tức là

$$x = \sqrt[3]{2} a.$$

Mà $\sqrt[3]{2}$ rõ ràng không thể là hữu hạn, vì vậy không thể được thể hiện bằng thước thẳng và compa.

Cuối cùng là bài toán dựng một hình vuông mà diện tích của nó bằng diện tích của hình tròn đã biết (hình 16-3).



Hình 16-3

Giả sử hình tròn đã biết có bán kính r , cạnh hình vuông là x . Ta phải có :

$$x^2 = \pi r^2,$$

tức là

$$x = \sqrt{\pi} r.$$

$\sqrt{\pi}$ nhìn bề ngoài thì chỉ là căn một tầng nhưng thực ra không đơn giản.

Vậy liệu có thể dùng thước thẳng và compa để thể hiện π được không ? Đây là bài toán đầy khó khăn, nó còn khó hơn cả việc chia một góc ra làm ba phần bằng nhau.

Ở đây không thể nói tỉ mỉ được, mà chỉ có thể nói rằng : trước đây khoảng hơn 1 thế kỉ (vào khoảng năm 1882), nhà toán học Carl Louis Ferdinand von Lindemann (12.4.1852 - 1.3.1939) người Đức đã chứng minh π là một số siêu việt. Điều này có nghĩa là π không phải là nghiệm của phương trình *hệ số nguyên*. Do vậy việc dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cũng không thể thực hiện được bằng thước thẳng và compa.

Ba bài toán cổ điển nổi tiếng về hình học đến đây đã hoàn toàn rõ ràng. Các bạn đọc hết mục này chắc đã cảm thấy uy lực của toán học lớn lao biết chừng nào.

Không phải đến thế kỉ XIX thì ba bài toán này mới được chỉ ra là không thể giải được bằng các dụng cụ Euclid. Hiện nay các phép chứng minh về điều này có thể tìm được trong nhiều sách giáo khoa nói về lí thuyết các phương trình, trong đó đã khẳng định các tiêu chuẩn cần có để dựng được chủ yếu phải là các tiêu chuẩn về bản chất là đại số, thể hiện trong hai định lí sau đây :

1. Số đo của bất cứ chiều dài nào dựng được bằng các dụng cụ Euclid từ một chiều dài đơn vị cho trước là một số đại số (không phải là số siêu việt).

2. Từ một chiều dài đơn vị cho trước không thể dựng được bằng các dụng cụ Euclid một đoạn mà độ đo chiều dài của nó là nghiệm của một phương trình bậc 3 với những hệ số hữu tỉ nhưng không có nghiệm hữu tỉ.

Định lí 1 đã loại bỏ bài toán "cầu phương một hình tròn". Điều này đã được C. L.F. von Lindemann chứng minh năm 1882 như đã nói ở trên .

Định lí 2 đã loại bỏ hai bài toán còn lại.

Điều cần lưu ý là chúng ta không nói rằng, *không có* góc nào có thể chia ba được bằng thước thẳng và compa, mà chỉ chứng minh rằng, *không phải tất cả các góc đều chia ba được*. Vì như các bạn đã thấy ở trên, góc 90° , 45° và nhiều góc khác nữa có thể chia làm ba bằng các dụng cụ Euclid.

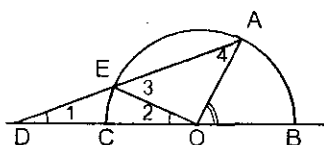
Tầm quan trọng của vấn đề (bài toán) này là ở chỗ, không thể dùng các dụng cụ Euclid để giải được, trừ phép xấp xỉ. Tuy nhiên, hơn 2000 năm vật lộn với chúng đã để lại nhiều khám phá quan trọng như các thiết diện conic, đường bậc 2, bậc 3 và nhiều đường siêu việt.

17. BƯỚC RA KHỎI QUỲ ĐẠO CỦA COMPA

Ở mục 16 chúng ta đã nói đến việc không thể dùng thước thẳng và compa để giải quyết ba bài toán cổ điển nổi tiếng về hình học. Vậy thì nếu bước ra khỏi ứng dụng của thước thẳng và compa, tức là bỏ qua hạn chế chỉ dùng các dụng cụ Euclid, tình hình sẽ ra sao ?

Chúng ta bắt đầu từ bài toán *chia một góc làm ba phần bằng nhau*.

Khoảng năm 425 trước Công nguyên, Hippias ở Elis đưa ra một đường siêu việt gọi là *đường bậc 2* và nhờ nó mà không những chia được một góc thành ba phần bằng nhau, mà còn có thể chia một góc thành nhiều phần bằng nhau và năm 240 trước Công nguyên Nicomedes đã quy bài toán này về bài toán tiệm cận và dùng đường conchoid để giải. Nhưng người được đề cập đến nhiều nhất có lẽ là Archimède.



Hình 17-1

Chắc các bạn còn nhớ Archimède đã làm kẻ thù khiếp sợ và giúp nhà vua làm sáng tỏ "vụ án chiếc vương miện" đã nói ở mục 1. Ông đã suy nghĩ rất nhiều và hết sức sâu sắc về hình học. Từ trong các tác phẩm của ông, chúng ta có thể

thấy cống hiến của ông trong bài toán này. Hình 17-1 được rút ra từ sách của ông. Trong nửa đường tròn tâm O, đường kính BC, bán kính OA, có góc AOB đã biết. Trên BC kéo dài lấy điểm D, sao cho AD cắt đường tròn để được $DE = OE$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh được góc O_2 bằng $\frac{1}{3}$ góc AOB.

Ta có

$$DE = OE = OA,$$

suy ra :

$$\widehat{D}_1 = \widehat{O}_2; \widehat{E}_3 = \widehat{A}_4; \widehat{E}_3 = \widehat{D}_1 + \widehat{O}_2 = 2\widehat{D}_1.$$

$$\text{Mà : } \widehat{AOB} = \widehat{A}_4 + \widehat{D}_1 = 2\widehat{D}_1 + \widehat{D}_1 = 3\widehat{D}_1.$$

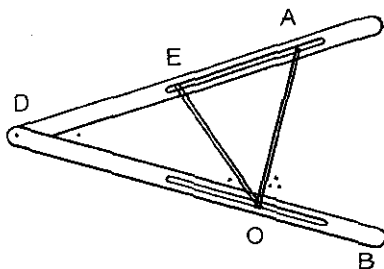
$$\text{Vậy : } \widehat{O}_2 = \frac{1}{3} \widehat{AOB}.$$

Từ gợi ý của Archimède, chúng ta liên tưởng đến vấn đề : nếu cho một thước thẳng có hai điểm cố định D và E thì có thể dùng nó và compa để chia một góc ra ba phần bằng nhau. Chúng ta chỉ cần để cho bán kính của đường tròn bằng độ dài DE là được. Cách làm là : vừa đảm bảo cho thước thẳng đi qua điểm A, vừa cho D trên đường kéo dài của BC và E trên nửa đường tròn, lúc đó góc D_1 chính bằng $\frac{1}{3}$ góc AOB cho trước.

Dựa vào nguyên lý này có người đã tạo ra dụng cụ như hình 17-2, gọi là dụng cụ chia ba một góc. Cách dùng dụng cụ này không cần hướng dẫn các bạn cũng biết.

Người ta còn tạo ra dụng cụ đơn giản như phần gạch gạch trong hình 17-3 để chia ba bất cứ một góc đã biết nào.

Dụng cụ này có thể làm bằng chất dẻo, bìa cứng, ... , trong đó $MN \perp PR$, $PM = MQ = QR$. Muốn chia ba góc AOB thì đặt P trên OA , O trên MN và OB tiếp tuyến với vòng tròn (tại C).

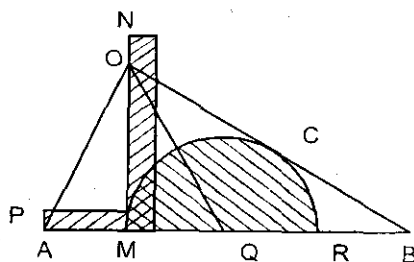


Hình 17-2

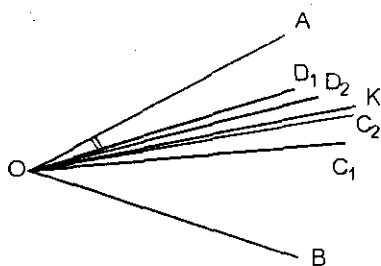
Khi đó OM và OQ chia góc AOB làm ba phần bằng nhau.

Khoảng năm 240 trước Công nguyên, Archimède đưa ra cách chia một góc làm ba phần bằng nhau bằng cách áp dụng *nguyên lí đưa vào* và đến năm 225 trước Công nguyên ông lại đưa ra *đường xoắn ốc* (vẽ sau được mang tên ông) để chia một góc làm ba, hoặc tổng quát hơn, chia một góc làm nhiều phần bằng nhau.

Trên đây là một số cách chia một góc bất kì đã biết làm ba phần bằng nhau. Tuy nhiên không có cách nào tuân thủ các điều kiện của phép dựng hình hình học. Dưới đây là một cách



Hình 17-3



Hình 17-4

chia gần đúng và không tuân thủ hạn chế "bằng các bước đi hữu hạn". Cách làm như sau (hình 17-4) :

Dựng đường phân giác OC_1 của góc AOB , đường phân giác OD_1 của góc AOC_1 , đường phân giác OC_2 của góc D_1OC_1 , đường phân giác OD_2 của góc D_1OC_2 , ... Cứ tiếp tục như vậy đến n lần sẽ được một loạt đường

$OC_1, OC_2, OC_3, \dots$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ và một loạt đường $OD_1, OD_2, OD_3, \dots$ cùng chiều kim đồng hồ. Hai loạt đường này sẽ tiệm cận với đường OK . Và góc AOK chính bằng $\frac{1}{3}$ góc AOB . Bởi vì do cách vẽ ta sẽ đạt giới hạn

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Ngoài ra còn có một số cách chia gần đúng sau đây :

- Nhờ các conic, trong đó có cách chia của Pappus người Ai Cập đưa ra khoảng năm 300 và Aubury mô tả năm 1896.

- Phép xấp xỉ của Cusa - Snell (có thể chia làm nhiều phần bằng nhau) (Nicolas Cusa (1401 - 1464), Willebrord Snell (1580 - 1626) người Hà Lan).

- Phép xấp xỉ nhờ dụng cụ Albrecht Durer (1471 - 1528) đưa ra năm 1525.

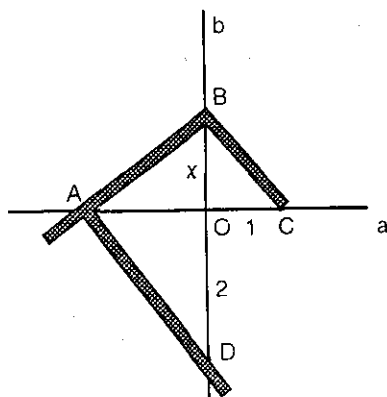
- Nhờ dụng cụ sơ đẳng nhưng thú vị được gọi là cái rìu, được mô tả trong cuốn sách xuất bản năm 1835.

- Phép dựng hình Euclid tiệm cận, trong đó có phép chia của Fialkowski đưa ra năm 1860.

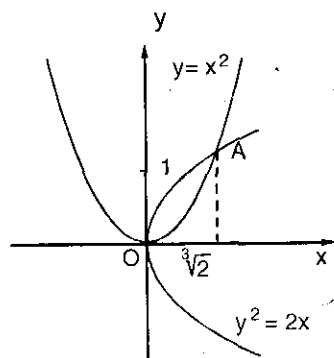
- Phép chia gần đúng của Kopf đưa ra năm 1919 và năm 1929 được O.Perron và M.d'Ocagne (1862 - 1938) cải tiến thêm, hoặc cách của M.d'Ocagne đưa ra năm 1934.

Bây giờ chúng ta xem xét bài toán dựng cạnh một khối lập phương mà thể tích của nó bằng hai lần thể tích của một khối lập phương đã biết.

Từ xưa người ta đã kể rằng nhà khoa học nổi tiếng Platon thời Hi Lạp - La Mã cổ đại đã đưa ra cách dựng như sau (hình 17-5) : Vẽ hai đường a, b vuông góc ở O . Trên a lấy $OC = 1$, trên b lấy $OD = 2$. Bây giờ dùng thước vuông ráp lại như hình vẽ sao cho hai đỉnh A, B của góc vuông nằm trên a, b . Gọi $OB = x$, đó chính là cạnh lập phương phải tìm $x = \sqrt[3]{2}$. Điều này dễ dàng chứng minh bằng tam giác đồng dạng. Với gợi ý này của Platon, người ta đã đưa ra cách tuyệt vời sau đây (hình 17-6) : Trên tọa độ xOy , đường parabol $y = x^2$ và đường parabol $y^2 = 2x$ gặp nhau tại A . Hoành độ của A là $\sqrt[3]{2}$ cần tìm.



Hình 17-5



Hình 17-6

Ngoài ra còn các cách gần đúng sau đây :

- Khoảng năm 440 trước Công nguyên, Hippocrates (460 - 377 trước Công nguyên) người Hi Lạp cổ đại đã rút gọn bài toán thành việc dựng hai tỉ lệ trung bình nhân kép giữa hai đoạn thẳng cho trước.

- Khoảng năm 400 trước Công nguyên, Archytas (428 - 365 trước Công nguyên) người Italia đưa ra cách giải hình học đáng chú ý.

Cách giải của Eudoxus (khoảng 400 - 350 trước Công nguyên) đưa ra khoảng năm 370 trước Công nguyên.

- Khoảng năm 350 trước Công nguyên, Menaechmus đưa ra hai cách giải có sử dụng các thiết diện conic.

- Khoảng năm 240 trước Công nguyên, Nicomedes đưa ra đường *conchoit* có thể dùng để giải.

- Khoảng năm 230 trước Công nguyên, Eratosthenes (275 - 194 trước Công nguyên) người Hi Lạp cổ đại đã dùng "cái tìm trung bình" bằng *cơ học* để giải.

- Khoảng năm 225 trước Công nguyên, Apollonius (262 - 190 trước Công nguyên) đã dùng *cơ học* để giải.

- Khoảng năm 180 trước Công nguyên, Diocles đã đưa ra đường *cisloit* để giải.

Thế kỉ XVII, thế kỉ XVIII nhiều nhà toán học xuất sắc đã tìm cách giải bài toán này, trong đó có cách của Viète (1646), của Grégoire de Saint - Vincent (1584 - 1667) đưa ra năm 1647, của R.Descartes đưa ra năm 1659, của Christian Huygens (14.1.1629 - 8.7.1695), của I. Newton đưa ra năm 1727.

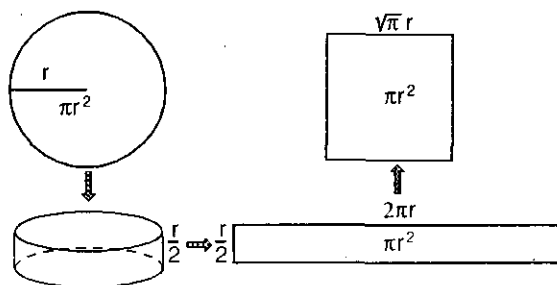
Tất nhiên hãy còn nhiều cách giải nữa.



Ch. Huygens

Còn bài toán dựng một hình vuông mà diện tích của nó bằng diện tích của một hình tròn đã biết thì sao ?

Đây là bài toán khó khăn nhất nhưng loài người không cam chịu bó tay. Sau khi người ta bước ra khỏi ứng dụng của thước thẳng và compa, các nhà hình học cổ đại đã tìm được cách giải quyết vấn đề này một cách tuyệt vời, thể hiện ở hình 17-7. Trước hết vẽ hình trụ tròn thẳng đứng, lấy hình tròn đã biết làm đáy, lấy nửa bán kính hình tròn đã biết làm chiều cao của hình trụ tròn. Sau đó, đặt hình trụ tròn này trên mặt phẳng và lăn một vòng, chúng ta sẽ được một hình chữ nhật. Rõ ràng



Hình 17-7

là diện tích hình chữ nhật này bằng diện tích xung quanh của hình trụ tròn đã biết. Sau cùng ta đổi hình chữ nhật này thành hình vuông có cùng diện tích. Đến đây vấn đề đã trở thành dễ dàng.

Có lẽ chưa có bài toán nào lại thu hút sự chú ý và thời gian như bài toán này. Từ khoảng năm 1800 trước Công nguyên người Ai Cập cổ đại đã "giải" bài toán này bằng cách lấy cạnh của một hình vuông bằng $\frac{8}{9}$ đường kính của đường tròn đã cho.

Sau đó, mặc dù đã có chứng minh khẳng định là không thể giải bài toán này bằng các dụng cụ Euclid nhưng hàng nghìn người vẫn tìm cách giải nó và họ cũng có được những kết quả.

Người Hi Lạp cổ đại đầu tiên nghiên cứu vấn đề này là Anaxagoras (499 - 427 trước Công nguyên) và sau đó là Hippocrates nhưng cũng chỉ thu được một số kết quả trong cấu phương một số hình trăng đặc biệt.

Khoảng năm 425 trước Công nguyên, Hippias đưa ra *đường cầu phương* (đường bậc 2) để giải, nhưng ai là người dùng nó với vai trò cầu phương thì sử sách nói khác nhau, có thể là Dinostratus (khoảng năm 350 trước Công nguyên) hoặc một nhà hình học nào đó.

Phép *cầu phương xấp xỉ* cũng dễ dàng giải được bài toán này, trong đó có cách của Jesuit Kochanski người Ba Lan đưa

ra năm 1685, của de Golder đưa ra năm 1849, của N. Cusa - W. Snell....



P.S. de Laplace

Phép dựng hình *Euclid* tiệm cận cũng được dùng để giải bài toán này.

Có thể bạn sẽ hỏi : đã không dùng thước thẳng và compa, vậy thì tại sao lúc đầu lại phải hạn chế là chỉ dùng các dụng cụ *Euclid* ? Câu hỏi này rất hay. Thực tế trong hình học thì đầu tiên là hạn chế chỉ dùng thước thẳng và compa, vì đây là hai dụng cụ rất đơn giản. Đến nay người

ta vẫn nhấn mạnh hạn chế này, vì người ta nghĩ rằng : dụng cụ vẽ hình càng ít thì người ta buộc phải suy nghĩ nhiều hơn. Nhờ đó sẽ rèn luyện được tư duy logic và óc tưởng tượng thêm phong phú. Đây chính là mục tiêu chủ yếu của học hình học. Nhà toán học Pierre Simon de Laplace (23.3.1749 - 5.3.1827) người Pháp đã nói : "Hình học hết như một cái nỏ (cung) mạnh". Câu nói này rất chính xác và rất tốt đối với việc bồi dưỡng tư duy và trí tuệ của loài người.

18. BÍ ẨN CỦA SỐ ÀO

Lịch sử cho thấy, quá trình tiếp nhận một con số mới là rất lâu dài và gian khổ.

Ở châu Âu khái niệm số âm chỉ xuất hiện từ cuối thế kỉ XII, do sự giải thích chính xác của nhà toán học L. Fiboracci. Nhưng mãi đến thế kỉ XVIII nhiều nhà toán học châu Âu vẫn cho số

âm là "hoang đường", "vô nghĩa". Họ nói : "0" là cái gì không có thực, vậy thì số âm còn bé hơn cả "0" thì có ý nghĩa gì ? Chả lẽ lại còn có những thứ còn bé hơn cả cái không có ?

Sự xuất hiện của số vô tỉ có thể có đã khá lâu, từ trước thế kỉ V trước Công nguyên. Người ta phát hiện thấy rằng, cạnh huyền của tam giác vuông cân với cạnh góc vuông là hai đoạn thẳng vô ước. Suy nghĩ này cũng đơn giản. Người ta đã áp dụng phương pháp phản chứng, tức là trước hết giả thiết $\sqrt{2}$ có thể biểu thị bởi phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (p, q không có ước số chung khác 1), sau đó suy luận là mâu thuẫn. Quá trình chứng minh như sau (hình 18-1) :

$$\text{Cho} \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} \text{ là phân số tối giản} \right), \quad (18-1)$$

$$\text{tức là} \quad p = \sqrt{2} q, \quad (18-2)$$

$$\text{hoặc} \quad p^2 = 2q^2. \quad (18-3)$$

Rõ ràng, p phải là số chẵn, nếu không thì (18-3) không xảy ra.

Bây giờ ta cho

$$p = 2p', \quad (18-4)$$

trong đó p' là số nguyên.

Thay (18 - 4) vào (18-3) ta được :

$$(2p')^2 = 2q^2, \quad (18-5)$$

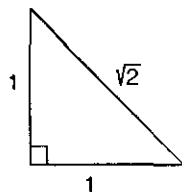
$$\text{hoặc} \quad 2p'^2 = q^2. \quad (18-6)$$

Từ (18-6) thấy rằng q cũng phải là số chẵn, nếu không hai vế sẽ không bằng nhau.

Như vậy p và q ít nhất cũng có ước số chung là 2. Do đó $\frac{p}{q}$ không phải là phân số tối giản, mâu thuẫn với (18-1).

Tại sao lại mâu thuẫn ?

Chính là vì $\sqrt{2}$ không thể viết dưới dạng phân số và như thế là giả thiết (18-1) không đúng.



Hình 18-1

Chứng minh này đã làm cho nhiều người hoảng sợ, vì điều mà họ đã đưa ra trước đây mâu thuẫn với kết luận này, do đó thà cự tuyệt với chân lí còn hơn là thừa nhận sai lầm. Nhưng dù sao thì chân lí cũng đã thắng.

Trong khi người ta vẫn còn ngờ vực với "số âm" thì lại xuất hiện một số mới đầy bí ẩn bước vào lĩnh vực toán học.

Năm 1484 nhà toán học Nicolas Choquet (1445 - 1500) người Pháp, trong một cuốn sách đã viết nghiệm của phương trình $4 + x^2 = 3x$ là

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 4}. \quad (18-7)$$

Ở đây đã xuất hiện một căn bậc 2 của số âm. Điều này đối với học sinh trung học ngày nay vẫn là một khu vực đáng sợ.

Năm 1545, nhà toán học G. Cardano bàn về việc liệu có thể chia 10 thành hai số mà tích của chúng bằng 40. Ông cho rằng, vấn đề này không giải bằng số thực, và viết đáp số là $5 + \sqrt{-15}$ và $5 - \sqrt{-15}$. Ông chứng minh

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 5 + 5 = 10;$$

$$(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = (25 - (-15)) = 40.$$

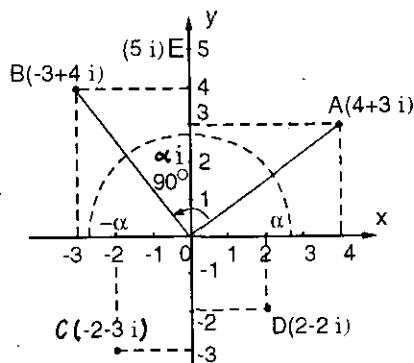
Hai biểu thức này đã làm cho người ta nghi ngờ và tất nhiên G. Cardano cũng nghi ngờ về tính hợp lí của cách tính này, nhưng ông vẫn là người dũng sĩ xông pha vào lĩnh vực này của toán học.

Sau G. Cardano, ngày càng nhiều người bước vào lĩnh vực "số ảo". Hàng thế kỉ sau, vào năm 1637 trong cuốn "Hình học" của R. Descartes, ông đã đặt tên số ảo cho căn bậc hai của số âm. Khoảng 140 năm nữa, các nhà toán học châu Âu bắt đầu dùng i (từ chữ imaginary, tức là hư ảo) để biểu thị $\sqrt{-1}$. Năm 1801 C. F. Gauss dùng kí hiệu i và dùng lẫn với số thực trong $\alpha + \beta i$

(α , β là số thực, β là phần ảo) gọi là số phức. Từ đó về sau i và số phức dần dần trở thành phổ biến trên thế giới.

Lúc đầu số ảo thường gây cho người ta cảm giác hơi thần bí, vì trên trục số không thể tìm được vị trí của nó. Các nhà toán học nước Anh với sức tưởng tượng dồi dào đã tìm ra được cách giải thích tuyệt vời. Giả thiết : có người nào đó nợ 10 mẫu đất, tức là anh ta có -10 mẫu, mà -10 mẫu đó là hình vuông thì mỗi cạnh của nó không phải là $\sqrt{-10} = \sqrt{10}i$ hay sao ?

Dùng cảm vén bức màn bí ẩn của số ảo chính là nhà lượng giác học Wessel (1745 - 1818) người Na Uy. Ông đã tìm ra phương pháp biểu thị bằng hình học của số phức. Theo cách giải thích của ông, một số phức như $A = 4 + 3i$ được thể hiện bằng điểm A ở hình 18-2, trong đó 4 là tọa độ trên trục thực Ox , 3 là tọa độ trên trục ảo Oy .



Hình 18-2

Một số thực α nằm trên trục hoành Ox khi quay ngược chiều kim đồng hồ sẽ gặp trục tung Oy ở αi . Trong hình học nó tương ứng với một điểm chạy ngược chiều kim đồng hồ 90° .

Nếu quay tiếp thì sẽ chuyển về số âm $-\alpha$ trên trục hoành.

Điều này được thể hiện trong biểu thức

$$(\alpha i) \cdot i = \alpha \cdot (i)^2 = \alpha \cdot (-1) = -\alpha. \quad (18-8)$$

Điều thú vị là thừa số i tương đương với điểm di chuyển ngược chiều kim đồng hồ 90° . Quy luật này đúng cho mọi số phức :

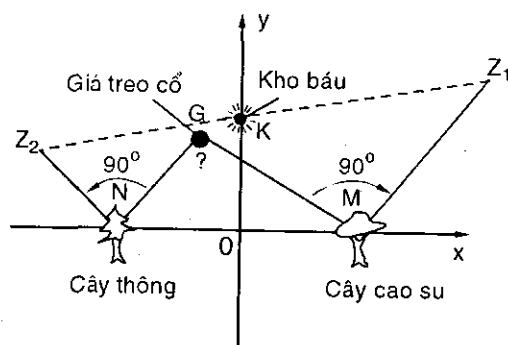
$$(4 + 3i) \cdot i = 4i + 3i^2 = -3 + 4i. \quad (18-9)$$

Đây là số phức B thể hiện ở hình 18-2.

Do $A(4 + 3i)$ và $B(-3 + 4i)$ đối xứng nên góc $AOB = 90^\circ$.

Sau đây là câu chuyện mà các bạn đọc xong sẽ thấy, một khi số phức có được chỗ đứng trong hình học thì nó sẽ có tác dụng biết chừng nào.

Ngày xưa có một thanh niên phát hiện trong đồng di sản của ông bà, cha mẹ để lại có một tấm da dê dùng làm giấy viết có chỉ rõ nơi cất dấu báu vật với nội dung như sau: "Dùng thuyền đến vĩ tuyến Bắc ..., kinh tuyến Tây... thì sẽ gặp một đảo hoang. Phía bắc đảo này có một thảm cỏ lớn. Trên thảm cỏ đó có một cây cao su và một cây thông, ngoài ra còn một cái giá treo cổ. Đó là cái giá trước đây dùng để trừng trị những kẻ phản loạn (hình 18-3). Từ giá treo cổ đi đến cây cao su được bao nhiêu bước chân thì hãy nhớ lấy. Từ cây cao su đi vuông góc về phía trái chừng ấy bước. Đánh dấu điểm này. Trở lại giá treo cổ để đi về phía cây thông và cũng phải nhớ lấy được mấy bước chân. Đến cây thông lại đi vuông góc về phía phải cũng chừng ấy bước chân. Lại đánh dấu điểm này. Sau đó đào bới tại điểm giữa hai điểm đã đánh dấu. Đó chính là nơi có kho báu".



Hình 18-3

Người thanh niên này vô cùng phấn khởi, quyết tâm mạo hiểm một chuyến xem sao. Anh ta thuê một chiếc thuyền, trong lòng tràn đầy hi vọng, hướng tới đảo hoang. Đến đảo, anh ta tìm thấy cây thông và cây cao su nhưng không tìm được giá treo cổ. Qua bao ngày dầm mưa dãi nắng, giá treo cổ bị chôn vùi dưới cát đã mục nát hết. Anh ta giận dữ đào bới điên cuồng, nhưng không tìm thấy gì cả, đành trở về tay không.

Đây là câu chuyện đáng tiếc. Vì nếu người thanh niên này hiểu biết chút ít về toán học, đặc biệt là số ảo thì anh ta sẽ tìm được kho báu. Bây giờ chúng ta hãy giúp anh bạn trẻ đó, dù công việc có vẻ đã muộn !

Ta coi đảo hoang là mặt phẳng phức. Lấy đường thẳng nối cây thông (N) và cây cao su (M) làm trục thực Ox, điểm chính giữa hai cây là O. Đường vuông góc với trục thực Ox là trục ảo Oy. Nửa khoảng cách giữa hai cây là đơn vị độ dài, do vậy M và N nằm ở điểm + 1 và - 1. Giả sử vị trí của giá treo cổ (G) chưa biết. Ta có :

$$G = \alpha + \beta i. \quad (18-10)$$

Gốc thông (N) ở điểm -1, gốc cao su (M) ở điểm + 1 nên phương vị tương đối sẽ là :

$$G + 1 \text{ và } G - 1.$$

Ta được tọa độ số phức ở điểm Z_1 là :

$$Z_1 = (G - 1) \cdot (-i) + 1 = -Gi + i + 1,$$

và ở điểm Z_2 là :

$$Z_2 = (G + 1) \cdot i + (-1) = Gi + i - 1.$$

Kho báu (K) nằm giữa hai điểm mốc Z_1 và Z_2 , vì vậy số phức biểu diễn K là :

$$K = \frac{1}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{1}{2} [(-G \cdot i + i + 1) + (G \cdot i + i - 1)] = i.$$

Điều này cho thấy, dù giá treo cổ (G) nằm ở đâu thì kho báu (K) vẫn nằm ở vị trí của số phức i trên trục ảo Oy. Nếu

bạn đọc không tin, có thể lấy giấy bút ra thay đổi những vị trí của G xem nó sẽ có kết quả như thế nào ?

Câu chuyện tìm kho báu trên đảo hoang đến đây đã kết thúc. Dù các tình tiết câu chuyện có thể đã được hư cấu, nhưng $\sqrt{-1}$ tạo nên số phức thì rõ ràng đã giúp mọi người có thể tìm được hết kho báu này đến kho báu khác trong toán học và các lĩnh vực khoa học khác.

19. ĐIỂM BẤT ĐỘNG THẦN KÌ

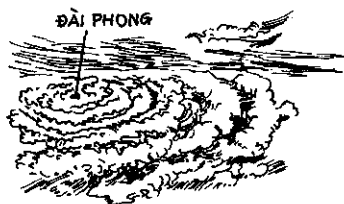
Nếu có người bảo bạn rằng, bất cứ lúc nào trên Trái Đất cũng có thể tìm được một điểm mà ở đó không có gió, bạn sẽ cảm thấy hết sức ngạc nhiên. Vậy mà điều này lại hoàn toàn là sự thật.

Rút gọn phạm vi lại thì sẽ làm cho bạn tin hơn. Nhiều người biết rằng, *dải phong* là điểm mắt bão trên biển nhiệt đới. Thực tế đó là điểm nằm giữa vòng xoắn không khí. Chúng ta thường nghe thông báo tin tức bão trên các phương tiện thông tin đại chúng : sức gió ở vùng trung tâm bão (vùng quanh dải phong) lên đến cấp 12, tức là mỗi giây gió đi qua khoảng 33m, bằng bốn lần tốc độ tàu hỏa bình thường. Nhưng sức gió hung bạo như vậy cũng chỉ tập trung ở khu vực đường kính khoảng 10km. Do tốc độ không khí chuyển động ở vòng ngoài rất mạnh nên không thể vào trung tâm được. Do đó, không khí ở dải phong gần như không chuyển động (không có gió).

Sau đây là một báo cáo đáng tin cậy do một nhà khí tượng người Mỹ sử dụng máy bay trinh sát đến khảo sát tại dải phong.

"... Không lâu, khi nhìn màn huỳnh quang trên rada của máy bay thấy ở đây không có gió, máy bay vội vàng tranh thủ bay qua dải phong (hình 19-1). Bỗng nhiên tôi thấy bầu trời trong

xanh, xung quanh hiện ra một bức tranh tuyệt đẹp. Giữa đài phong là cảnh trong vắt, xung quanh là một bức tường mây bao bọc, có chỗ bức tường mây cao dựng đứng sừng sững, còn những nơi khác bức tường mây giống như trên khăn đài của sân vận động bao bọc xung quanh khoảng 10 - 12km, tựa như thêu dệt trên bầu trời xanh, ...".



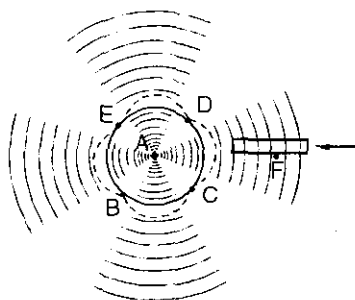
Hình 19-1

Như vậy là ở nơi gió bão gào thét vẫn tồn tại một điểm bất động của gió.

Hiện tượng có một điểm bất động trong thiên nhiên có thể bắt gặp bất cứ ở đâu. Trong cuốn "Bí mật khoa học" do Trường đại học Tokyo (Nhật Bản) xuất bản có nêu một việc rất thú vị : "Thấy giáo dân một đoàn học sinh đi tham quan một ngôi chùa. Thấy giáo nhìn vào trong cái chuông xem cấu tạo thế nào. Một học sinh tinh nghịch muốn hù dọa thầy, liền cầm dùi gõ vào chuông. Chẳng dè, không dọa được thầy và các nữ sinh đứng bên cạnh, ngược lại, cậu ta bị tiếng chuông kêu to quá làm ù cả tai, làm cậu phải ngồi thụp xuống".

Tại sao có hiện tượng lạ như vậy ?

Giáo sư Diễn Trung Phú đã vẽ ra hình 19-2 và giải thích thêm : "Điều này cũng như việc đổ đầy nước vào trong một cái bát, sau đó lấy chiếc dũa gõ vào thành bát nước. Quan sát chúng ta thấy sóng nước sẽ từ bên ngoài chuyển động vào trong lòng bát. Lúc đó phần sóng ở giữa bát sẽ mất đi vì chúng tác động vào nhau. Ở các điểm A, B, C, D, E thực tế là điểm bất động của sóng. Ngược lại chỗ đứng của người gõ là điểm F, tình cờ lại là nơi có chấn động lớn nhất. Cho nên âm thanh đã gây nên hiện tượng ù tai".



Hình 19-2

Bạn có thể thực hiện một trò chơi thú vị như sau :



Hình 19-3

Lấy hai tấm ảnh không bằng nhau của cùng một người (hình 19-3), ném tấm ảnh nhỏ lên tấm ảnh lớn, sau đó bạn tuyên bố với mọi người : hai tấm ảnh này nhất định có một điểm chung.

Khán giả của bạn sẽ nửa tin nửa ngờ. Nhưng khi bạn nói rõ cách tìm được điểm chung đó thì mọi người sẽ hết nghi ngờ.

Coi tấm ảnh lớn là $A'B'C'D'$ và tấm ảnh nhỏ là $ABCD$ (hình 19-4).

Kéo dài AB gặp $A'B'$ tại P . Vẽ hai đường tròn đi qua A, P, A' và B, P, B' , cắt nhau tại O . Điểm O nằm trong ảnh nhỏ và tất nhiên phải nằm trong ảnh lớn. Đó chính là tâm của phép biến đổi đồng dạng và cũng chính là điểm bất động cần tìm.

Chúng ta đã biết :

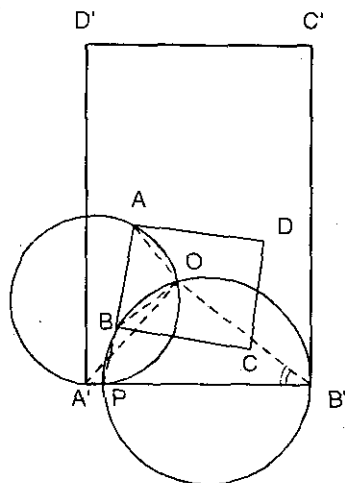
$$\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$$

$$\widehat{OBA} = \widehat{OB'A'},$$

suy ra

$$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'.$$

Hãy xem điểm bất động có gì kì lạ mà buộc người ta phải tìm kiếm !



Hình 19-4

Việc nghiên cứu hệ thống điểm bất động được bắt đầu từ đầu thế kỉ XX. Năm 1912 nhà toán học Luitzen Egbertus Jan Brouwer (27.2.1881 - 2.12-1966) người Hà Lan đã chứng minh : mọi ánh xạ liên tục từ một vật thể cầu trong không gian n chiều vào chính nó thì có một điểm bất động. Đó là định lí về điểm bất động nổi tiếng.

Đối với phần lớn học sinh trung học thì một số thuật ngữ toán học trong định lí của L.E. J. Brouwer không cần phải giải thích. Ví dụ, "ánh xạ liên tục", nói đại khái là hai điểm cách nhau rất nhỏ, qua ánh xạ thì cự li của hai điểm ảnh vẫn rất nhỏ. Còn "không gian n chiều" thì đây là một khái niệm trừu tượng. Nói cụ thể : đường thẳng là không gian 1 chiều, mặt phẳng là không gian 2 chiều, không gian thông thường là không gian 3 chiều, ... Một đoạn thẳng là thể cầu 1 chiều, mặt hình tròn phẳng là thể cầu 2 chiều, khối cầu bình thường là thể cầu 3 chiều, ...



L.E.J. Brouwer

Định lí của L.E. J. Brouwer có tính thực tiễn rất thú vị.

Lấy một cái lọ có đáy bằng và một mảnh giấy vừa khít đáy lọ. Mỗi điểm trên mảnh giấy thì tương ứng với một điểm ở đáy lọ. Bây giờ lấy mảnh giấy ra, vò mảnh giấy thành một cục rối vút vào lọ. Theo định lí của L.E. J. Brouwer thì dù cục giấy được vò thế nào, không cần biết cục giấy rơi vào chỗ nào của đáy lọ, chúng ta vẫn có thể khẳng định là trên mảnh giấy vẫn cứ có một điểm mà điểm đó chiếu xuống đáy lọ thì trùng với điểm tương ứng với nó trên đáy lọ trước đây, cho dù chúng ta có thể không chỉ ra được đó là điểm nào.

Sự thực trên đây có thể giải thích như sau :

Giả sử hình chiếu của cục giấy trên đáy lọ là khu vực Ω_1 . Rõ ràng một điểm trên cục giấy với điểm tương ứng trên Ω_1 sẽ nằm trong khu vực Ω_1 . Giả sử hình chiếu của phần cục giấy tương ứng với khu vực Ω_1 là khu vực Ω_2 trên đáy lọ. Rõ ràng $\Omega_2 < \Omega_1$. Tương tự như vậy một điểm khác trên cục giấy với điểm tương ứng trên Ω_2 nằm trong Ω_2 . Hình chiếu của phần này của tờ giấy là khu vực Ω_3 trên đáy lọ, thì $\Omega_3 < \Omega_2$, ... Cứ như vậy làm nhiều lần sẽ được một loạt khu vực $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$. Cái nọ nhỏ hơn cái kia, tạo nên những vòng tầng nọ nhỏ hơn tầng kia, cuối cùng sẽ rút gọn lại thành một điểm (hoặc

một khu vực bé nhất). Vậy vị trí của điểm (hoặc khu vực bé nhất) này trên cục giấy nhất định vừa đúng vào điểm tương ứng ở đáy lọ.

Định lí của L. E. J. Brouwer ra đời đã gây sự hứng thú của các nhà toán học và đã có nhiều ứng dụng khác nhau trong toán học, đặc biệt trong lí thuyết phương trình vi phân, tích phân, lí thuyết cực trị, ...

Trước khi có định lí L. E. J. Brouwer, năm 1799, nhà toán học C. F Gauss đã chứng minh :

Phương trình đại số bậc n :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

có ít nhất một nghiệm phức.

Đây là định lí cơ bản của đại số học.

Ngày nay, sau khi chúng ta nghiên cứu lí luận về điểm bất động, có thể coi nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ là điểm bất động của hàm số :

$$\varphi(x) = f(x) + x.$$

Nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ không thể vượt qua khu vực hình tròn có bán kính đủ lớn của mặt phẳng số phức, còn hàm số $\varphi(x)$ thì rõ ràng là liên tục. Do đó, ở khu vực hình tròn đó, vận dụng định lí điểm bất động của L.E. J. Brouwer thì có ít nhất là một điểm bất động x , nghĩa là $\varphi(x) = x$, hay $f(x) + x = x$.

Như vậy $f(x) = 0$ chỉ ít là có 1 nghiệm.

Do đó có thể thấy tác dụng to lớn của định lí này là chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình một cách rất đơn giản.

Nhưng về lí thuyết điểm bất động thì các nhà toán học có vẻ chưa được thỏa mãn lắm, vì nó chỉ mới cho biết sự tồn tại của điểm bất động, chứ chưa nói rõ điểm bất động ở đâu. Vấn đề này đã làm đau đầu các nhà toán học đã nửa thế kỉ nay. Mãi đến cuối những năm 60 của thế kỉ XX, vấn đề mới tiến triển.

Năm 1967, giáo sư Skafu người Mỹ đã có một bước đột phá từ chỗ chưa biết, đến chỗ đã biết điểm bất động. Ông đã đưa ra cách tính dòng hữu hạn những điểm tiệm cận đến điểm bất động và đạt được thành công mỹ mãn.

Điều thú vị là, ngay bản thân Skafu là người chuyên nghiên cứu kinh tế nhưng toán học đã giúp rất nhiều cho ông và đồng nghiệp trong công tác. Điều này nói lên rằng, bất cứ môn khoa học nào, nếu vận dụng toán học tốt mới thực sự giúp cho ngành khoa học đó cất cánh được. Một nhà khoa học Nga đã từng nói câu nổi tiếng : "Toán học là nữ hoàng của khoa học tự nhiên" quả thật không hề cường điệu.

20. NGHỆ THUẬT "TÀ HOA"

Tháng 6-1974, Hội nghị quốc tế về "Cách tính và ứng dụng điểm bất động" lần đầu tiên, được tổ chức tại Mỹ. Tham gia hội nghị này có hàng chục nhà toán học của các nước Âu - Mỹ và Nhật Bản. Tại hội nghị, giáo sư Hadro Cooen ở Trường đại học Boston (Mỹ) đã đọc bài tham luận gây chấn động. Ông đã trình bày phương pháp giải phương trình đại số về điểm bất động. Với tài hùng biện, ông đã đưa người nghe như lạc vào vương quốc thực vật đầy sinh động. Ông đã mô tả xây dựng một hàng rào hình khối. Hàng rào này chia làm nhiều tầng từ dưới lên trên ngày càng dày đặc (hình 20-1). Ở tầng thấp nhất của hàng rào ông đặt một "chậu hoa" đặc biệt. Sau đó ông đưa tất cả các yếu tố của phương trình cần giải vào "chậu hoa". Tiếp đến,



Hình 20-1. Mặt bên của hàng rào.

xung quanh "chậu hoa" mọc lên những mầm mới. Những mầm cây này leo lên hàng rào, vòng vèo một lúc rồi vươn lên đỉnh hàng rào. Mỗi mầm cây chỉ 1 nghiệm của phương trình. Tất cả nghiệm của phương trình đều được tìm ra.

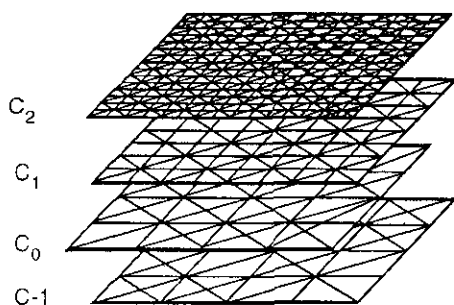
Đây không phải là chuyện khôi hài, mà chính là khoa học được thực hiện ở thế kỉ XX. Làm thế nào mà H. Cooen biến được môn khoa học khô khan thành môn học có sức sống động như vậy. Ông đã dựa vào phương pháp tiệm cận điểm bất động mà Skafu đã đưa ra. H.Cooen đã hoàn thành xuất sắc ba việc :

Một là, tạo ra một hàng rào hình trụ ;

Hai là, tạo ra "chậu hoa" có nhiều mầm cây ;

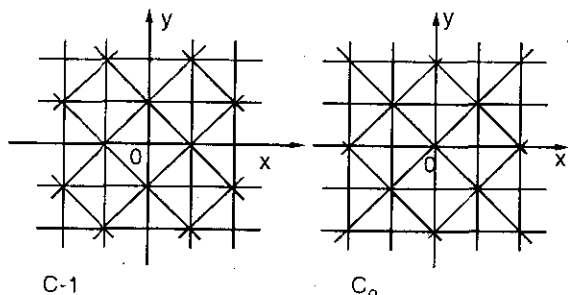
Ba là, để cho những mầm cây thần kì lớn lên theo những thông tin có được.

Trước hết hãy xem hàng rào hình trụ.



Hình 20-2

Đó là việc sắp xếp khéo léo hàng loạt mặt số phức C_{-1} , C_0 , C_1 , C_2 , ... giống như các tấm đan của tầng nhà lầu (hình 20-2). Sau đó, trên mặt mỗi tấm số phức chia ra thành những tam giác vuông cân theo một quy tắc nhất định. Tấm dưới cùng có kí hiệu là C_{-1} , cạnh của tam giác vuông cân là 1. Kết cấu của C_0 ,

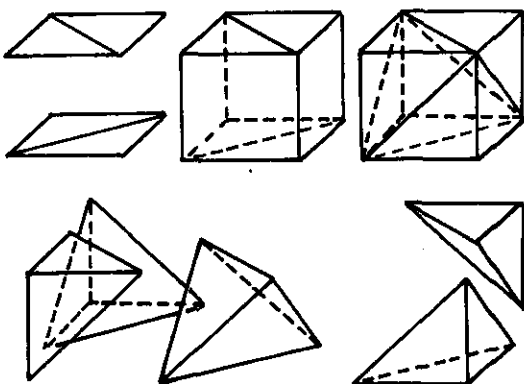


Hình 20-3

C_{-1} giống nhau, chỉ khác là đường xiên của hai mặt tách ra, tấm trước đi qua điểm gốc, tấm sau thì không đi qua điểm gốc (hình 20-3).

Từ C_0 , bề mặt của các tầng là $C_1, C_2, \dots$. Trên các bề mặt đó đều có đường xiên đi qua điểm gốc. Trên mỗi tầng đó, đường huyền của tam giác vuông cân sẽ thu nhỏ lại còn một nửa.

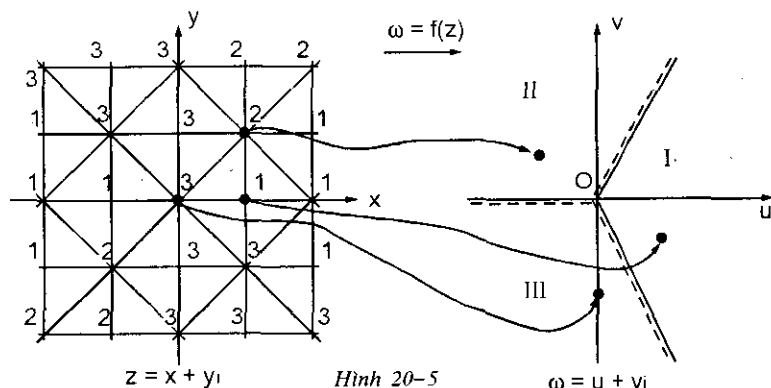
Bây giờ, giữa hai tầng gần nhau chúng ta dùng những thanh kim loại nhỏ dựng thành khối lập phương nhỏ (hình 20-4).



Hình 20.4

Đến đây H.Cooen đã hoàn thành việc thứ nhất.

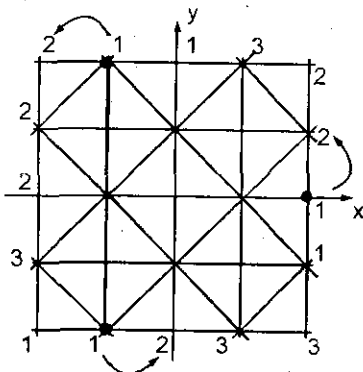
Việc thứ hai là xây dựng "chậu hoa". Ông đưa mặt phẳng phía dưới chia ra ba góc 120° (hình 20-5).



Hình 20-5

Như vậy đối với đa thức $f(x)$, bậc n và một điểm z bất kỳ trên mặt phẳng đều có thể tính được $\omega = f(z)$. Vị trí của ω phải là một trong ba khu vực đó. Nếu ở góc I thì trên điểm z tương ứng đánh dấu "1", ở góc II đánh dấu "2", ở góc III đánh dấu "3". Như vậy chúng ta có thể đánh dấu trên tất cả các

điểm nút của hàng rào. Điều này rõ ràng là bằng việc truyền tất cả thông tin của $f(x)$ trên toàn bộ hàng rào. Đây thực sự là điều kì diệu.



Hình 20-6. "Chậu hoa" và mầm.

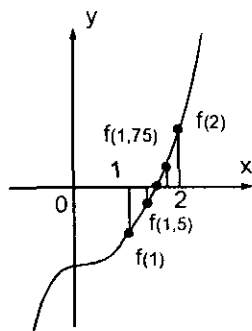
Sau khi làm các việc ở trên, H.Cooen lại chứng minh : Lấy điểm gốc C_1 trên bề mặt làm trung tâm, cạnh bên dài 1,04m, nhất định có tồn tại một điểm n theo chiều ngược kim đồng hồ. Kí hiệu của những điểm này theo hướng từ 1 đến 2 như các chấm đen trên hình 20-6. H.Cooen gọi các hình tam giác vuông trên mặt là "chậu hoa", còn các điểm n ở xung quanh "chậu hoa" chính là những cái mầm đã mọc lên. Chứng

minh này của ông thực ra không khó, nhưng rất tốn công, ở đây không đề cập đến.

Bây giờ ta xem những cây thần kì của H.Cooen đã lớn lên như thế nào ?

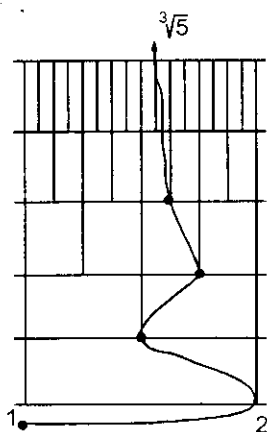
Để làm rõ điều này, phải có ví dụ sau đây : Nếu chúng ta muốn giải phương trình $x^3 - 5 = 0$ có thể làm như sau : Lấy $f(x) = x^3 - 5$. Dễ hiểu là $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ thì giữa 1 và 2 phải có 1 nghiệm. Xét điểm giữa, ta tính được $f(1,5) < 0$ thì giữa 1,5 và 2 phải có 1 nghiệm. Ta lại tính được $f(1,75) > 0$ nên ta phán đoán được giữa 1,50 và 1,75 có 1 nghiệm. Cứ như vậy, vòng quanh nghiệm ngày càng nhỏ lại, cuối cùng rút lại còn 1 điểm. Đó chính là nghiệm $\sqrt[3]{5}$, ta có $f(\sqrt[3]{5}) = 0$.

Thực tế tính toán trên đây cũng là "phương pháp mọc mầm" của cây. Mầm cây bắt đầu từ 1, cứ tính dần

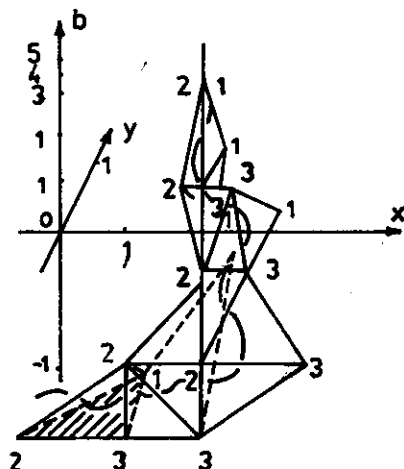


Hình 20-7

lên. Quy định là cứ tính hàm số thực $f(a) < 0$ tương ứng với điểm a . Mầm mọc xuyên sang bên phải và ngược với nó là vươn sang bên trái (hình 20-7). Do càng mọc lên càng cao thì càng dày, cuối cùng là không gian càng bé lại. Tựa hồ như chỉ thẳng theo hướng $\sqrt[3]{5}$. Hình 20-8 thể hiện quá trình này.



Hình 20-8



Hình 20-9

Phương pháp thực vật kì lạ của H. Cooen dùng là nguyên lí trong ví dụ nêu ở trên. Chỉ có điều là phương pháp này sử dụng có 4 mặt thì nó phức tạp hơn mà thôi.

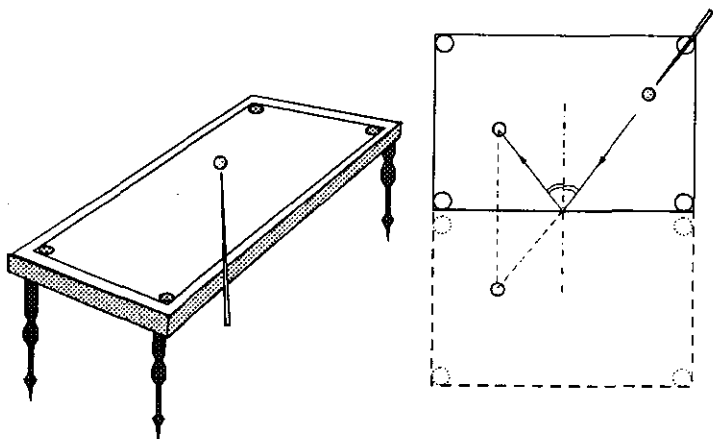
Hình 20-9 mô tả sự vươn lên của một nhánh hình trụ của H. Cooen.

Ngày nay các nhà toán học đã dựa theo phương pháp của H. Cooen để tạo ra trình tự tính toán cho máy tính điện tử.

21. BÍ MẬT BẮT ĐẦU TỪ QUẢ BI-A

Bi-a là trò chơi bắt nguồn từ Pháp vào thế kỉ XVI. Ngày nay, vẫn có nhiều người mê trò chơi này, nhưng không mấy ai biết được nguyên lí toán học của nó.

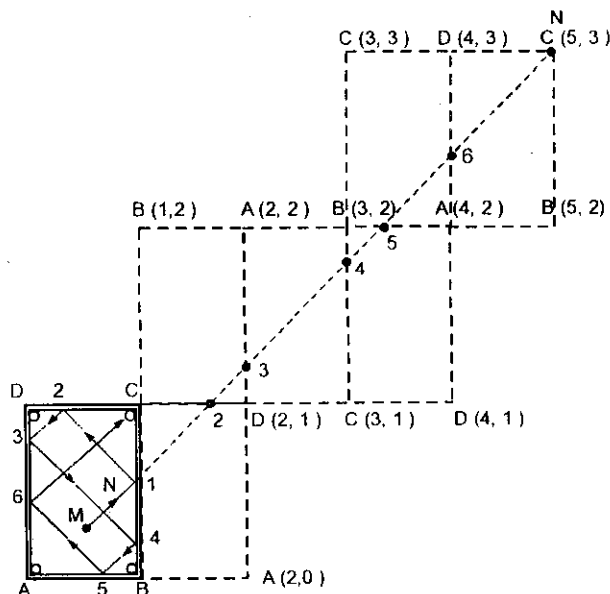
Ta xem quả bi-a là một hình tròn, bàn bi-a có chiều dài và chiều rộng theo một tỉ lệ nhất định. Sự chuyển động của quả bi-a theo nguyên tắc "góc tới = góc phản xạ" đập vào thành bàn bi-a để tiến lên (hình 21-1).



Hình 21-1.

Vấn đề ta cần quan tâm là quả bi-a đi theo hướng nào ? Trong tình trạng nào thì quả bi-a mới chạm vào 4 thành bàn (vách) và rơi vào hố lưới ? Hình 21-2 chỉ phương pháp phản xạ liên tiếp (tái phản xạ) và mô tả đường vận động thực tế của quả bi-a. Không cần giải thích bạn đọc cũng biết, nếu quả bi-a không chạm vào thành bàn thì theo nguyên tắc, nó vẫn chuyển động thẳng. Do đó, chỉ có đường đi tới đủ dài thì quả bi-a mới rơi vào hố được.

Nếu coi bàn bi-a là hình vuông thì vẫn không thay đổi được bản chất của kết luận vừa nêu. Như vậy có thể coi quả bi-a

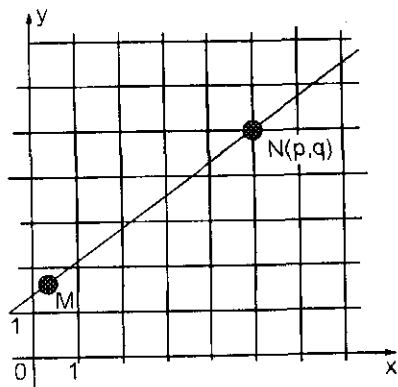


Hình 21-2

xuất phát từ điểm M trong góc vuông của một hệ tọa độ vuông góc. Với tọa độ này phương trình đường MN mà quả bi-a chuyển động có thể viết thành

$$ax + by = c \quad (a, b \neq 0). \quad (21-1)$$

Đây là phương trình vô định bậc 1. Nếu chúng ta không thêm bất điều kiện nào đối với (21-1) thì chỉ cần cho một x bất kì cũng sẽ được một y tương ứng. Điều này cho thấy (21-1) có vô số nghiệm. Tên gọi phương trình vô định có lẽ được ra đời vì như vậy.



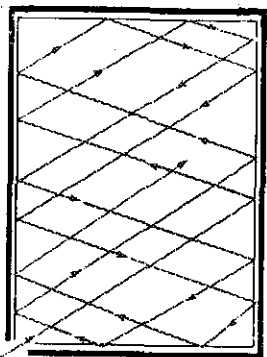
Hình 21-3

Nhưng trong phần lớn trường hợp, phương trình (21-1) có thêm điều kiện hạn chế, ví dụ tọa độ là số nguyên.

Nếu giá trị tọa độ (p, q) của điểm N đều là số nguyên thì, ta gọi N là "điểm nguyên" (hình 21-3). Phương trình (21-1) có nghiệm là số nguyên, tức là các đường thẳng do chúng biểu thị phải đi qua một điểm nguyên. Do điểm nguyên tương đương với điểm ở thành trên bàn bi-a nên quả bi-a liệu có rơi vào hố lưới hay không, đều phụ thuộc vào phương trình (21-1) của quả bi-a. Nhưng nghiệm của phương trình (21-1) có phải chỉ là số nguyên hay không? Tổng quát là có phải bất kì phương trình vô định bậc 1 nào cũng đều có nghiệm số nguyên hay không?

Câu trả lời là : không hoàn toàn như vậy. Ví dụ phương trình $3x + 6y = 2$ thì nghiệm sẽ không phải là số nguyên. Thực tế là bất kì số nguyên nào của x, y trong vế trái của (21-1) đều chia hết cho 3, còn vế phải thì không thể được.

Kết luận nêu ở trên cho thấy, nếu người chơi bi-a chọn đường đi của quả bi-a không thỏa đáng thì sẽ làm cho quả bi-a nhiều lần chạm vào thành bàn bi-a và như vậy thì quả bi-a khó rơi vào hố lưới.



Hình 21-4. Mô hình vật đen tuyệt đối.

Điều thú vị là, hiện tượng vừa nêu ở trên có liên hệ rất kì lạ với "vật đen tuyệt đối" trong vật lí. Vật đen tuyệt đối là vật thể lí tưởng, có thể hấp thụ hoàn toàn tia sáng. Ở điểm đỉnh của cái hộp hình chữ nhật mà vách của nó có sức phản xạ tốt, ta đục một lỗ nhỏ. Đó chính là mô hình vật đen tuyệt đối (hình 21-4). Nhìn từ trên xuống, khi ánh sáng lọt vào lỗ nhỏ, lúc đó phương trình của đường ánh sáng có thể viết là :

$$ax + by = 0. \quad (21-2)$$

Nếu ánh sáng có thể lọt qua lỗ nhỏ thì lúc đó đường thẳng phải đi qua một điểm (p, q) với p, q nguyên. Thay vào (21-2)

ta có

$$\frac{a}{b} = -\frac{q}{p}, \quad (21-3)$$

cũng có nghĩa là $\frac{a}{b}$ phải là một số có nghĩa. Điều này lại rất hiếm thấy. Cho nên ánh sáng lọt vào lỗ nhỏ rất khó có thể lại xuyên qua lỗ nhỏ khác, tức là ánh sáng đã bị hấp thụ ngay trong vật đen tuyệt đối.

Bây giờ chúng ta quay lại phương trình bất định bậc 1.

Nếu ta biết một nghiệm nguyên của (21-1) là $x_0 = p, y_0 = q$ thì chúng ta sẽ có thể biết toàn bộ các nghiệm nguyên của nó.

Thực tế, nếu tìm được x và y là nghiệm khác của (21-1) đã biết thì do

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c; \\ ap + bq &= c, \end{aligned} \right\} \quad (21-4)$$

ta được

$$a(x - p) = -b(y - q). \quad (21-5)$$

Do a, b nguyên tố cùng nhau, cho nên sẽ có

$$(x - p) = bk;$$

$$(y - q) = -ak,$$

và ta được :

$$\left. \begin{aligned} x &= p + bk; \\ y &= q - ak. \end{aligned} \right\} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21-6)$$

Từ những điều đã nêu ở trên chúng ta thấy rằng, nếu có thể tìm được một nghiệm riêng nào đó đối với phương trình vô định bậc 1 hai ẩn thì việc viết ra tất cả các nghiệm là chẳng khó khăn gì.

Đầu năm 1979, nhà vật lí học được giải Noben, tiến sĩ Lí Chính Đạo người Mỹ gốc Trung Quốc đã đưa ra bài toán vui sau đây :

Trên bãi cát bờ biển có một đồng hạt dẻ, đây là tài sản của 5 con khỉ. Chúng muốn chia đều số hạt dẻ này. Một con khỉ đến, nó chờ mãi mà không thấy mấy con khác đến. Nó bèn

chia đều số hạt dẻ làm 5 phần bằng nhau, còn thừa 1 hạt. Nó liền vứt hạt thừa xuống biển và lấy phần mình mang đi. Sau đó con thứ 2 đến, nó lại chia đồng hạt dẻ còn lại làm 5 phần bằng nhau, lại thừa 1 hạt, nó lại vứt hạt thừa xuống biển và lấy phần mình mang đi. Các con khỉ khác đến cũng làm như vậy. Hỏi có bao nhiêu hạt dẻ trong đồng ban đầu ?

Có thể giải bài toán này như sau :

Giả sử đồng hạt dẻ ban đầu có x hạt, cuối cùng thừa y hạt. Theo đầu bài ta có :

$$\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{4}{5} (x - 1) - 1 \right) - 1 \right) - 1 \right) - 1 = y.$$

Thu gọn lại ta được :

$$1024x - 3125y = 8404. \quad (21-7)$$

Giải phương trình vô định bậc 1 (21-7) không khó lắm. Nếu ta chú ý đến các hệ số, thấy :

$$3125 - 1024 = 2101.$$

Mà 2101 bằng $\frac{1}{4}$ của 8404, do đó ta được :

$$x = -4; y = -4. \quad (21-8)$$

Như vậy (21-7) là phương trình có cách giải đặc biệt.

Từ (21-8) thấy, tất cả nghiệm số nguyên của (21-7) có thể viết thành :

$$\left. \begin{aligned} x &= -4 - 3125k; \\ y &= -4 - 1024k. \end{aligned} \right\} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21-9)$$

Nhưng x và y phải là nguyên dương. Do vậy khi $k = -1$ ta được đôi số nhỏ nhất $x = 3121$ và $y = 1020$.

Đây chính là lời giải của Lí Chính Đạo. Ông còn cho biết : nhà vật lí học nổi tiếng P.A.M. Dirac (sinh 1902) người Anh đã đưa ra lời giải khác nhưng cuối cùng cũng phải thừa nhận là, nếu số khỉ trong đoàn là 5 thì

$$\left. \begin{aligned} x &= 5^6 - 4; \\ y &= 4^5 - 4. \end{aligned} \right\} \quad (21-10)$$

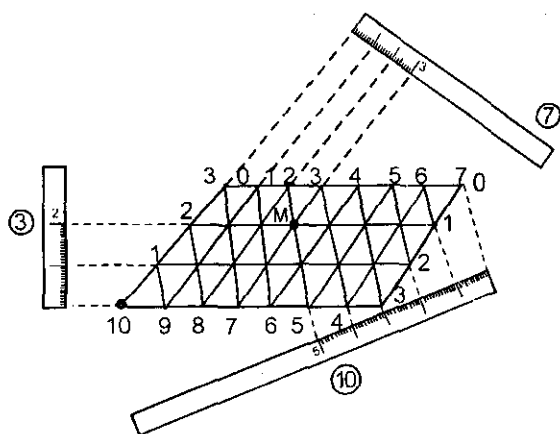
22. TỪ MỘT CHIẾC BÌNH CÓ ĐÁY HÌNH BÌNH HÀNH

Những người có đầu óc thông minh nhiều khi chỉ qua thí nghiệm họ cũng có thể nghĩ ra những ý nghĩ sâu sắc. Sau đây là một ví dụ như vậy :

Có ba chiếc bình dung tích 3 lít, 7 lít và 10 lít. Bây giờ có 10 lít dung dịch muốn chia thành hai phần bằng nhau và dùng ba bình đó thì làm thế nào ?

Để giải bài toán này, người ta đã nghĩ ra cách rất hay sau đây :

Từ một chiếc bình có đáy hình bình hành, hai cạnh dài 7 đơn vị và 3 đơn vị, giữa chúng là góc 60° , người ta chia đáy bình thành các tam giác đều (hình 22-1). Tại mỗi đỉnh của tam giác đều, đóng theo ba cạnh sẽ được số dung dịch đựng trong ba

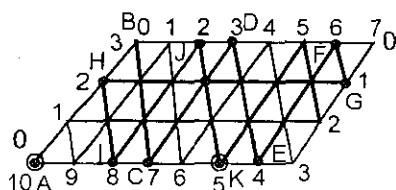


Hình 22-1

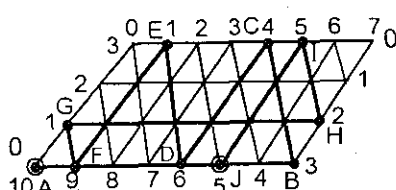
bình. Ví dụ, tại đỉnh M thì trong bình 3 lít có 2 lít dung dịch, bình 7 lít có 3 lít dung dịch và bình 10 lít có 5 lít dung dịch. Chúng ta viết gọn lại là (2, 3, 5). Cách biểu thị này giống như điểm tọa độ. Rõ ràng, nếu ngay từ đầu toàn bộ dung dịch đựng trong bình 10 lít, ta có thể biểu thị bằng điểm A(0, 0, 10). Hãy nghĩ xem, nếu rót đi rót lại thì dung dịch sẽ thay đổi như thế nào ?

Trong quá trình rót có thể có một bình nào đó không thay đổi lượng dung dịch (giữ nguyên) và không bao giờ rót đầy một bình mà bình khác lại hết sạch dung dịch. Tất cả các trạng thái đó đều được thể hiện bằng các điểm tương ứng ở hình bình hành. Theo nguyên tắc này, từ điểm A chúng ta có thể chia đều 10 lít dung dịch bằng hai cách :

Cách 1 (hình 22-2) : Biểu thị sự rót đi rót lại dung dịch theo cách này như bảng 22-1. Dấu * trong bảng 22-1 thể hiện đã chia được 5 lít theo yêu cầu.



Hình 22-2



Hình 22-3

Cách 2 (hình 22-3). Biểu thị sự rót đi rót lại dung dịch theo cách này như bảng 22-2. Dấu * trong bảng 22-2 thể hiện đã chia được 5 lít theo yêu cầu.

Hai cách này tuy hiệu quả giống nhau, nhưng cách 2 ít hơn 1 lần so với cách 1. Vậy có phải cách 2 là tốt nhất không ? Ngoài hai cách này còn cách nào nữa không ? Làm sao để nói cách nào tốt ?... Những câu hỏi đó các bạn đọc hết mục này sẽ rõ.

Bảng 22-1

Số lần rót theo cách 1

Thứ tự lần rót	Bình đựng dung dịch (lít)			Điểm tương ứng ở hình 22-2	Kí hiệu trạng thái
	3	7	10		
0	0	0	10	A	(0, 0, 10)
1	3	0	7	B	(3, 0, 7)
2	0	3	7	C	(0, 3, 7)
3	3	3	4	D	(3, 3, 4)
4	0	6	4	E	(0, 6, 4)
5	3	6	1	F	(3, 6, 1)
6	2	7	1	G	(2, 7, 1)
7	2	0	8	H	(2, 0, 8)
8	0	2	8	I	(0, 2, 8)
9	3	2	5*	J	(3, 2, 5)
10	0	5*	5*	K	(0, 5, 5)

Bảng 22-2

Số lần rót theo cách 2

Thứ tự lần rót	Bình đựng dung dịch (lít)			Điểm tương ứng ở hình 22-3	Kí hiệu trạng thái
	3	7	10		
0	0	0	10	A	(0, 0, 10)
1	0	7	3	B	(0, 7, 3)
2	3	4	3	C	(3, 4, 3)
3	0	4	6	D	(0, 4, 6)
4	3	1	6	E	(3, 1, 6)
5	0	1	9	F	(0, 1, 9)
6	1	0	9	G	(1, 0, 9)
7	1	7	2	H	(1, 7, 2)
8	3	5*	2	I	(3, 5, 2)
9	0	5*	5*	J	(0, 5, 5)

Có thể bạn đã thấy rằng, cả hai cách đã nêu thì bình 10 lít chỉ có tác dụng trung gian, dùng để chứa chứ không có tác

dụng đồng lượng. Như vậy nếu ta gọi x là số lần rót đầy bình 3 lít và tương tự y là số lần rót đầy bình 7 lít, ta có phương trình

$$3x + 7y = 5, \quad (22-1)$$

trong đó x, y có thể là số nguyên âm.

Ta có nghiệm của (22-1) một cách dễ dàng : $x = 4$ và $y = -1$. Điều này có nghĩa là bình 3 lít đã có 4 lần được đựng đầy rồi lại rót sang bình 7 lít và rót đầy bình này, rồi rót hết bình 7 lít thì chia được 10 lít làm hai phần bằng nhau. Thứ tự rót được thể hiện ở bảng 22-3 (cách 3).

Bảng 22-3

Số lần rót theo cách 3

Thứ tự lần rót	Bình đựng dung dịch (lít)			Giải thích
	3	7	10	
0	0	0	10	
1	3	0	7	Rót đầy vào bình 3 lít
2	0	3	7	Rót hết bình 3 lít sang bình 7 lít
3	3	3	4	Rót đầy vào bình 3 lít
4	0	6	4	Rót hết bình 3 lít sang bình 7 lít
5	3	6	1	Rót đầy vào bình 3 lít
6	2	7	1	Rót 1 lít của bình 3 lít sang đầy bình 7 lít
7	2	0	8	Rót hết bình 7 lít sang bình 10 lít
8	0	2	8	Rót hết bình 3 lít sang bình 7 lít
9	3	2	5*	Rót đầy bình 3 lít
10	0	5*	5*	Rót hết bình 3 lít sang bình 7 lít.

Rõ ràng cách 3 này là cách 1.

Cũng như vậy, chúng ta có thể thấy $x = -3$, $y = 2$ cũng là nghiệm của phương trình vô định bậc 1 (22-1). Điều này có nghĩa là bình 7 lít đã được đựng đầy 2 lần, sau đó rót sang bình 3 lít và bình này có 3 lần rót hết thì sẽ chia đều được hai phần của 10 lít. Đây chính là cách 2.

Bây giờ ta bàn thêm. Giả sử dung tích của ba bình là p , q và s lít ($s = p + q$). Cần rót đi rót lại để chia thành n lít. Theo phân tích ở trên, nếu chúng ta có thể tìm được nghiệm của phương trình vô định bậc 1 :

$$px + qy = n, \quad (22-2)$$

tức là ta đã giải được bài toán. Nhưng nghiệm lại phải là số nguyên. Điều này chỉ cần p và q nguyên tố cùng nhau. Như vậy chúng ta sẽ tìm được số nguyên l , m . Ta được :

$$pl + qm = 1. \quad (22-3)$$

Nhân hai vế của (22-3) với n ta có :

$$npl + nqm = n. \quad (22-4)$$

Từ (22- 4) và (22-2) ta được :

$$\left. \begin{array}{l} x = nl; \\ y = nm. \end{array} \right\} \quad (22-5)$$

Phương pháp tìm l , m đã có từ rất lâu rồi. Chuyện cổ kể rằng, nhà toán học Euclid đã tìm ra. nó từ thế kỉ IV trước Công nguyên. Phương pháp này như sau ($p < q$) : $p - q$, được số dư r_1 , nếu $r_1 \neq 1$ thì lấy $r_1 - p$, được số dư r_2 , nếu $r_2 \neq 1$ thì lấy $r_2 - r_1$, được số dư r_3 , ... Cứ tiếp tục như vậy đến khi được $r_i = 1$.

Nếu chúng ta sử dụng công thức của giáo sư Lí Chính Đạo (21-9) ở mục 21 thì tiến hành như sau : Tương tự (22-3) cho $p = 1024$, $q = 3125$, ta được :

$$1024l + 3125m = 1, \quad (22-6)$$

Dùng phương pháp của Euclid, phân tích :

$$3125 = 1024 \cdot 3 + 53$$

$$1024 = 53 \cdot 19 + 17$$

$$53 = 17 \cdot 3 + 2$$

$$17 = 2 \cdot 8 + 1.$$

Từ đó ta được :

$$1 = 17 - 2 \cdot 8$$

$$= 17 - (53 - 17 \cdot 3) \cdot 8 = 17 \cdot 25 - 53 \cdot 8$$

$$= (1024 - 53 \cdot 19) \cdot 25 - 53 \cdot 8$$

$$\begin{aligned}
 &= 1024 \cdot 25 - 53 \cdot 483 \\
 &= 1024 \cdot 25 - (3125 - 1024 \cdot 3) \cdot 483 \\
 &= 1024 \cdot 1474 - 3125 \cdot 483.
 \end{aligned} \tag{22-7}$$

Từ (22-7) và (22-6), ta được :

$$l = 1474, m = -483. \tag{22-8}$$

Từ (21-7), (22-2) và (22-6), ta được $n = 8404$.

Từ (22-8) và (22-5), ta có :

$$\begin{cases} x = 8404 \cdot 1474 = 12\,387\,496; \\ y = 8404 \cdot (-483) = -4\,059\,132. \end{cases} \tag{22-9}$$

Như mục 21 ta đã biết, tất cả nghiệm số nguyên của (21-7) được tìm theo (21-9), với $k = -1$.

Ở đây sẽ ứng với $k = -3964$ và cũng là cách giải đặc biệt, nhưng cách giải này sẽ phức tạp hơn rất nhiều so với cách giải của Lí Chính Đạo ở mục 21. Hai cách giải này khác nhau rất xa. Cách giải của Lí Chính Đạo là dựa vào suy luận khoa học, còn cách giải ở đây (của Euclid) là suy đoán theo khả năng tư duy. Tất nhiên là suy luận hay tư duy đều là kết tinh của khoa học. Cách của Euclid đi từ vấn đề tồn tại đến phương pháp tối ưu.

Bài toán chia dung dịch trên đây đã làm nhiều người đau đầu nhức óc để tìm lời giải. Nếu trong tay bạn có cân, bạn thực hiện phép cân thì bài toán trở nên dễ dàng. Quy tắc đặt ra cho bài toán là không được dùng cân, không được dùng các dụng cụ đo thể tích có chia độ, mà chỉ với 2 hoặc 3 bình có quy cách xác định để rót qua lại sao cho càng ít lần càng tốt.

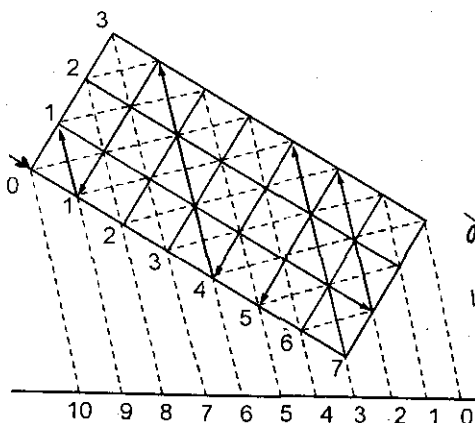
Với bài toán đã nêu ở trên, có người suy nghĩ rằng, đã có bình 3 lít, vậy thì chỉ cần 2 lít nữa là được và đã có bình 7 lít nên nếu có 9 lít thì sẽ có 2 lít. Muốn có 9 lít, tức là ba lần của bình 3 lít. Do vậy người đó đã đưa ra cách chia theo mũi tên ở hình 22-4.

Bình 10 lít	10	3	3	→	6	6	→	9	9	→	2	2	→	5
Bình 7 lít	0	7	4	↓	4	1	↓	1	0	↓	7	5	↓	5
Bình 3 lít	0	0	3	↓	0	3	↓	0	1	↓	1	3	↓	0

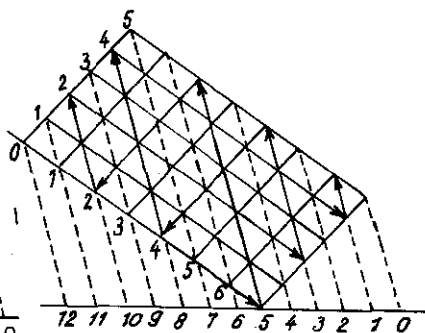
Hình 22-4

Không biết ai đó khi nhìn các mũi tên ở hình 22-4 đã liên hệ với đường đi của quả bi-a, nên đã đưa ra hình 22- 5. Đây là một hình chữ nhật thể hiện bàn bi-a và đường kẻ là đường đi của quả bi-a. Qua đó có thể tìm thấy cách rút dung dịch qua lại giữa các bình.

Tương tự bài toán này là bài toán chia 12 lít dầu làm hai phần bằng nhau nếu có ba bình 12 lít, 7 lít và 5 lít.



Hình 22-5



Hình 22-6

Sơ đồ chia như hình 22-6. Ta thấy giải pháp tốt nhất là rút 11 lần qua lại.

Điều cần lưu ý ở đây là tổng dung tích của hai bình nhỏ phải bằng bình lớn và bình lớn phải bằng dung dịch phải chia.

23. HÀN TÍN ĐIỂM QUÂN

Hàn Tín là tướng giỏi, sống đầu thời Hán (thế kỉ II trước Công nguyên). Chuyện kể rằng, có một hôm ông cùng đi với một vị tướng kiểm tra quân lính trên bãi tập. Khi quân lính đã tập hợp thành ba hàng dọc, Hàn Tín hỏi : "Hàng ngang cuối cùng



có bao nhiêu người ?".
Vị tướng báo cáo :
"Hàng cuối cùng chỉ có 2 người". Hàn Tín báo cho tập hợp thành năm hàng dọc và lại hỏi :
"Hàng cuối cùng có mấy người ?

Đáp : "chỉ có 3 người". Ông lại ra lệnh tập hợp thành bảy hàng dọc và lại thấy thừa 2 người.

Lúc này Hàn Tín lại hỏi : "Hôm nay quân lính ra bãi tập là bao nhiêu người ?". Vị tướng trả lời : "Có 2345 người !". Hàn Tín nghĩ một lúc rồi nói : "Không đúng ! Thực tế chỉ có 2333 người, ít hơn số lượng báo cáo là 12 người !". Vị tướng bán tín bán nghi bèn tập hợp quân lính lại rồi đếm. Quả nhiên chỉ có 2333 người. Vị tướng hỏi Hàn Tín là làm sao đếm được chính xác và nhanh như vậy. Hàn Tín cười, nói : "Ta dựa vào quy luật số dư mà tính ra !".

Câu chuyện "Hàn Tín điểm quân" (hay "đếm quân" cũng vậy) nổi tiếng, tuy có tình tiết hư cấu nhưng thuật toán thần kì lại bao hàm ý nghĩa toán học rất sâu sắc. Nó được đưa vào bộ sách "Tồn Tử toán kinh" ra đời từ thế kỉ III và được lưu truyền khá rộng rãi trong dân chúng.

Trong bộ sách "Tồn Tử toán kinh" bài toán được nêu ra như sau : Có một số mà chia 3 thì còn 2, chia 5 còn 3, chia 7 còn 2. Hỏi đó là số nào ?

Đây là bài toán thú vị nhưng khó giải, nên đã kéo dài hàng nghìn năm, lại thêm nhiều tình tiết kì được thêm dệt thêm, do vậy đã có nhiều tên rất thần bí, như "Quý cốc toán", "Thần kì diệu toán", "Tiển quân thuật", "Tấn Vương điểm quân ngầm", "Đại diễn cầu nhất thuật",...

Trong bộ sách "Tồn Tử toán kinh" đã đưa ra lời giải như sau : Trước hết lấy 5 nhân với 7, rồi nhân với 2, được 70.

Trong bộ sách "Tôn Tử toán kinh" đã đưa ra lời giải như sau : Trước hết lấy 5 nhân với 7, rồi nhân với 2, được 70.

Với 70 thì khi chia 3 sẽ dư 1. Lấy 3 nhân với 7, được 21, rồi chia cho 5 cũng dư 1. Lấy 3 nhân với 5, được 15, rồi chia cho 7 cũng dư 1.

Nếu lấy 70 nhân 2, lấy 21 nhân 3, lấy 15 nhân 2 thì tổng của chúng là 233. Do

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \text{ và } 233 - 105 \cdot 2 = 23$$

và nếu lấy 23 chia cho 3 ; 5 và 7 thì số dư là 2 ; 3 và 2. Vậy 23 chính là số phải tìm.

Cách giải này có thể quy về hai công thức

$$70 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 233 ;$$

$$233 - 105 \cdot 2 = 23.$$

Trong câu chuyện "Hàn Tín điểm quân" rõ ràng số quân lính x được tính theo công thức

$$x = 233 + 105 \cdot n, \quad (23-1)$$

trong đó n là số nguyên.

Thống kê mấy cách tập hợp quân thì Hàn Tín thấy $x \leq 2345$. Điều này xảy ra khi $n = 20$ và đúng như con số mà Hàn Tín đã công bố : 2333.

Có bài hát được lưu truyền trong dân gian về cách giải bài toán này như sau :

"Ba người cùng đi, bảy mươi hiêm có ;
Năm cây hoa mai, hăm một cành nhỏ ;
Bảy con đoàn tụ, đúng ngày trăng rằm ;
Để mà biết rõ, trừ trăm linh năm".

Nội dung của bài hát là : Đưa số dư sau khi đếm bộ 3 nhân với 70 (vì 70 là bội số chung của 5 và 7), lấy 70 chia cho 3 còn dư 1 ; đưa số dư sau khi đếm bộ 5 nhân với 21 (vì 21 là

bội số chung của 3 và 7), lấy 21 chia cho 5 còn dư 1 ; đưa số dư sau khi đếm bộ 7 nhân với 15 (vì 15 là bội số chung của 3 và 5), lấy 15 chia cho 7 còn dư 1. Lấy tổng các số nhân đó trừ đi 105 (105 là bội số chung của 3, 5 và 7) đến khi được số nhỏ hơn 105 thì đó là số phải tìm.

Ví dụ, khi đếm bộ 3 dư 1, đếm bộ 5 dư 2, đếm bộ 7 dư 2 thì số nhỏ nhất là bao nhiêu ?

Theo nguyên tắc vừa nêu ở trên, ta có :

$$(1 \cdot 70 + 2 \cdot 21 + 2 \cdot 15) - 105 = 142 - 105 = 37.$$

Vậy 37 là số nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đặt ra .

Nhưng tại sao lại trừ cho 105 ? Bởi vì đó là $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Vậy dùng các số khác với ba số 3, 5 và 7 có được không ?

Được, nếu như ba số đó nguyên tố cùng nhau từng đôi một, ví dụ ba số 2, 3 và 11.

Đây là loại bài toán thuộc về cách giải phương trình vô định bậc 1. Bài toán này (như đã nói ở mục 4) đã được Tân Cửu Thiệu thời Nam Tống hoàn chỉnh rõ ràng về lí luận và cách tính toán, được gọi là "Đại diện cầu nhất thuật" (giảng giải về phép tính toán). Vì vậy có thể nói rằng loại bài toán này đã được người Trung Quốc giải quyết triệt để từ trước thế kỉ XIII.

Cần nói thêm là, nhà toán học Hoa La Canh (12.11.1910 - 12.6.1985) người Trung Quốc đã nêu ra phương pháp gọi là phương pháp "ngốc".

Nội dung của phương pháp này như sau :

"Trên bàn tính, trước hết đẩy 2, sau đó mỗi lần đẩy thêm 3 cho đến khi chia 3 còn dư 1 mới dừng. Tiếp tục đẩy mỗi lần thêm 15 cho đến khi chia 7 còn dư 2 mới thôi."

Cả quá trình đó thực ra chỉ có hai hàng toán :

$$2, 2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8$$

$$8, 8 + 15 = 23.$$

Từ đó có thể thấy rằng, phương pháp "ngốc" thực ra là không ngốc tí nào !

Các nhà toán học phương Tây cũng đã tìm ra kết quả như vậy từ năm 1247, nhưng đó là công việc của gần 8 thế kỉ trước đây. Đến nay các nhà toán học phương Tây vẫn gọi phương pháp này là "Phương pháp chia dư thần kì của Trung Quốc".

Sau đây chúng ta giới thiệu sơ lược về bài toán "Đại diện cầu nhất thuật".



Ta lấy một số N để khi chia cho a_1 thì dư r_1 , chia cho a_2 thì dư r_2 , chia cho a_3 thì dư r_3 , ... Nếu viết công thức đại số sẽ là

$$\left. \begin{aligned} N &= a_1 q_1 + r_1 ; \\ &= a_2 q_2 + r_2 ; \\ &= a_3 q_3 + r_3 ; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (23-2)$$

Trong bài toán "Đại diện cầu nhất thuật", trước hết cần tìm một số m_1 để khi chia cho a_1 thì dư 1 nhưng đồng thời m_1 lại chia hết cho $b_1 = a_2 \cdot a_3$. Lại tìm một số m_2 chia cho a_2 dư 1 nhưng đồng thời m_2 chia hết cho $b_2 = a_1 \cdot a_3$... Lại tìm một số m_3 chia cho a_3 dư 1 nhưng đồng thời m_3 lại chia hết cho $b_3 = a_1 \cdot a_2$. Cứ tiếp tục như vậy thì cũng có nghĩa là giải hàng loạt phương trình

$$b_i x + a_i y = 1. \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (23-3)$$

Ở trên chúng ta đã nói, khi chia cho a_1, a_2, a_3 ... đôi một nguyên tố cùng nhau thì với mỗi $i = 1, 2, 3, \dots$ phương trình vô định (23-3) đều có nghiệm (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, \dots$). Vậy nếu

$m_i = b_i x_i$ thì

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots \quad (23-4)$$

chính là con số chia cho a_1 dư r_1 , chia cho a_2 dư r_2 , chia cho a_3 dư r_3 , ... Khi nó tăng thêm hoặc giảm đi $a_1 a_2 a_3 \dots$ thì tính chất ấy vẫn không thay đổi.

Ví dụ, tìm số nguyên, dương nhỏ nhất mà chia cho 3 dư 2, chia cho 7 dư 3, chia cho 11 dư 4.

Trước hết ta tìm số chia cho 3 dư 1 nhưng lại chia hết cho 77. Điều này có thể tìm thấy trong bội số của 77. Rõ ràng đó chính là số $154 = 77 \times 2$, tức là $m_1 = 154$. Sau đó ta lại tìm số chia cho 7 dư 1 nhưng lại chia hết cho 33. Chú ý rằng :

$$33 - 7 \times 4 = 5,$$

$$7 - 5 = 2,$$

$$5 - 2 \times 2 = 1.$$

Do đó

$$1 = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2$$

$$1 = 5 \cdot 1 - (7 - 5) \cdot 2$$

$$1 = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$$

$$1 = (33 - 7 \cdot 4) \cdot 3 - 7 \cdot 2$$

$$1 = 33 \cdot 3 - 7 \cdot 14.$$

Thế là ta tìm được $m_2 = 33 \cdot 3 = 99$.

Cũng làm như vậy, ta tìm được $m_3 = -21$.

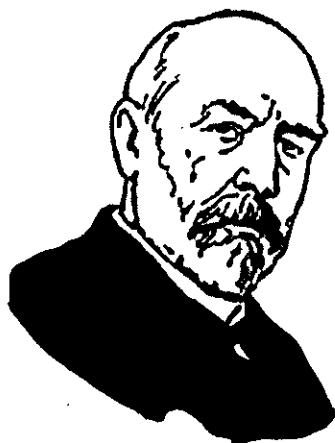
Ta giả thiết $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$.

Vậy :

$$\begin{aligned} m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 &= 154 \cdot 2 + 99 \cdot 3 + (-21) \cdot 4 \\ &= 308 + 297 - 84 = 521. \end{aligned}$$

Chú ý là $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ và lấy 521 chia cho 3 thì dư 2, chia cho 7 dư 3, chia cho 11 dư 4. Do vậy số nguyên, dương nhỏ nhất là $521 - 231 \cdot 2 = 59$.

Cuối cùng phải nói đến điều này : năm 1856 bài toán "Đại diện cầu nhất thuật" đã được Biernatzki dịch ra và lưu truyền



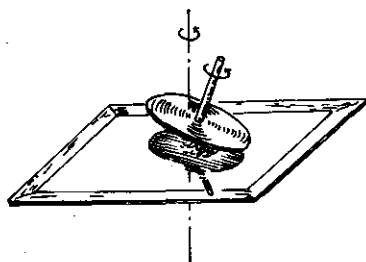
G. Cantor

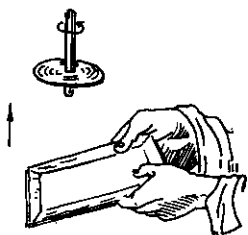
khắp châu Âu. Nhà sử học A. Wylie (1815 – 1887) đã dựa theo bản dịch của Biernatzki để chú thích, nhưng do không hiểu hết được nội dung nên đã gây sự nghi ngờ cho nhiều người, trong đó có giáo sư Georges Cantor (3.3.1845 – 6.1.1918) người Đức. Về sau nhờ sự cố gắng của Mathiessen và nhiều người khác, cuối cùng họ đã hiểu được thành tựu rực rỡ của toán học Trung Quốc.

24. NỮ HOÀNG CỦA VƯƠNG QUỐC TOÁN HỌC

Con quay là trò chơi mà hầu hết học sinh đều biết. Khi nó quay trên mặt bàn thấy nó hình như đứng yên tại một chỗ. Nhưng tại sao nó lại không ngã ? Đó là điều ít người giải thích được.

Giá trị nghiên cứu và giá trị thực dụng của nguyên tắc con quay là rất lớn và sâu sắc. Nếu ném con quay lên không, nó vẫn tự điều chỉnh phương hướng. Đặc điểm này đã được áp dụng để chế tạo con quay định hướng sử dụng trong hàng





hải, hàng không và ngay cả trong kĩ thuật vũ trụ. Do việc sử dụng nó có ý nghĩa khoa học nên có câu chuyện như sau :

Năm 1888 Viện Hàn lâm khoa học Pháp quyết định sẽ trao giải thưởng quốc tế lần thứ 3 và 3000 frăng cho ai có bài nghiên cứu về chuyển động.

Trước đó mấy thập niên, cũng đã có vài lần các nhà khoa học trình bày nhưng không thành công, cho nên Viện Hàn lâm khoa học Pháp mới quyết định trao giải thưởng lần thứ 3. Vì vậy đã thu hút nhiều nhà khoa học thử sức. Sau đó, trong rất nhiều luận án gửi đến, Ủy ban xét duyệt đã rất kinh ngạc khi họ phát hiện trong những luận án đó có một luận án nổi bật trí tuệ, ở mỗi bước chứng minh, mỗi kết luận đều thể hiện tài hoa hơn hẳn mọi người. Với giá trị của bản luận án, Ủy ban xét duyệt đã quyết định tăng tiền thưởng từ 3000 frăng lên 5000 frăng. Sau khi đọc luận án, Ủy ban xét duyệt đã tìm đến chủ nhân của luận án, thì ra đó là một người phụ nữ Nga, một người anh hùng trong vương quốc toán học - bà Xofia Vaxilevna Covalevskaja (15.1.1850 - 10.2.1891).

Trong lịch sử khoa học thế giới, phụ nữ có rất ít người nổi tiếng, trước thế kỉ XX X.V. Covalevskaja là một người trong số đó. Cuộc đời phấn đấu của bà đã mang đầy tính huyền thoại.

X.V. Covalevskaja là con một vị tướng. Do người chú cố vũ, giúp đỡ, gây hứng thú toán học cho bà. Còn bố của bà thì lại rất thành kiến đối với việc phụ nữ đam mê toán học, nên ông phản đối việc con gái theo con đường toán học. Trước tình thế đó, bà đành trốn ở phòng riêng để đọc sách toán. Những điều bí hiểm của toán học càng gây tò mò, ham hiểu biết trong bà. Đó là thời kì bà mới 13 tuổi. Sau đó 1 năm, trong một lần bà đọc một cuốn sách vật lí, bà phát hiện trong sách có rất nhiều kiến thức về tam giác. Đối với bà, tam giác là một



X.V. Covalevskaja

thế giới còn rất xa lạ. Thế là bà bắt đầu tìm hiểu và tự bà đã tìm được khá nhiều công thức về tam giác. Rõ ràng đó là một sáng tạo mới của một nhánh toán học. Đây là con người kiệt xuất được thiên phú. Người ta cho rằng, bà có một cái gì đó giống như một Pascal mới. Nhà toán học Blaise Pascal (bút danh Lovi de Montalte, hoặc Amos Dettonville) (19.6.1623 - 19.8.1662) người Pháp, lúc nhỏ đã được thế giới công nhận là thần đồng.

Do nhiều người thuyết phục, cuối cùng bố của X.V.Covalevskaja cũng đã đồng ý để bà ra ngoài học vi tích phân và những môn khoa học khác. Đúng lúc khát vọng được học lên đại học thì bị bố ra lệnh phải trở về nhà. Là một vị tướng nhưng ông không hiểu được khát vọng cháy bỏng của con ông. Ông đã hiểu một cách cứng nhắc rằng, phụ nữ với toán học là hai thái cực không thể cùng tồn tại trong một con người được, hơn nữa con gái ông đã là người lớn rồi.



B. Pascal

Để tiếp tục sự nghiệp học tập của mình. X.V. Covalevskaja đã chấp nhận làm người phụ nữ và bà quyết định lấy chồng. Chồng bà là một nhà sinh học trẻ tuổi và đầy tài năng. Sau khi kết hôn, vợ chồng bà dọn đến Peterbua. Nhưng ở đây những khát vọng tốt đẹp của bà đã tan biến, vì trường đại học của Nga lúc đó không tiếp nhận nữ sinh. Lấy chồng, đối với bà là điều vui mừng nhưng cũng là nỗi khổ. Không lâu sau khi lấy chồng bà đã có con. Bận việc gia đình, chồng con, nên bà không còn thời gian để tâm đến toán học. Một hôm, vì thiếu giấy dán tường ở phòng của con, bà buộc phải xé cuốn sách toán của M.V. Ostrogradski (1801 - 1862) để dán. Không ngờ những tờ

giấy ngẫu nhiên có những kí hiệu toán học ấy đã đánh thức lòng yêu toán học trong bà. Với sự giúp đỡ của chồng, nên bà đã có nhiều sách để đọc và gia đình bà đã có được gian nhà tối tân bên cạnh Trường đại học Peterbua để bà được nghe giảng bài trong trường. Dần dần trình độ toán học của bà được nâng cao. Khát vọng trong bà càng cháy rực.

Năm 1870, lúc đó X.V.Covalevskaja tròn 20 tuổi, bà quyết định đến Trường đại học Berlin. Đây là một trường đại học mà bà đã ngưỡng mộ từ lâu. Nhưng bà không biết rằng, lúc đó tư tưởng coi thường phụ nữ là không có biên giới. Trường đại học Berlin đã kiên quyết từ chối nhận bà. Nhưng bà không nản chí. Bà đã tìm đến nhà toán học nổi tiếng, giáo sư Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (31.10.1825-19.2.1897) người Đức, đang giảng dạy tại đó để thẳng thắn đặt vấn đề nhờ ông giúp đỡ. Người giáo sư già nhìn người phụ nữ nước ngoài với cặp mắt đầy nghi hoặc. Sau đó ông đưa ra câu hỏi về hàm số elliptic mà thời đó còn là điều bí ẩn và cũng là điều ông đang suy nghĩ, X.V.Covalevskaja đã trả lời bằng những kết luận dứt khoát, tư duy khác thường, những kiến giải đầy trí tuệ, nên đã làm cho K.T.W. Weierstrass



K.T.W.Weierstrass

kinh ngạc. Ông đã phá lệ, nhận bà là học trò học tư. Với sự giúp đỡ của K.T.W.Weierstrass, bà đã trưởng thành nhanh chóng.

Năm 1873, X.V. Covalevskaja liên tiếp công bố ba luận án về phương trình vi phân. Do tính sáng tạo và giá trị của luận án nên tháng 4-1874 bà được Trường đại học Berlin phá lệ công nhận và cấp bằng tiến sĩ toán học, lúc đó bà mới 24 tuổi.

Năm 1875 X.V. Covalevskaja náo nức trở về Tổ quốc. Nhưng chào đón bà không phải là niềm vui mà là sự đối xử bạc bẽo.



P.L. Trebusev

Chính phủ Sa Hoàng đã quyết định không cho bà dạy học, các cơ quan nghiên cứu không ở đâu nhận bà. Điều này đã làm sự nghiên cứu toán học của bà bị ngắt quãng mất 3 năm. Tiếp đó là 2 năm bà phải hi sinh cho đứa con mới ra đời. Năm 1880, Trường đại học Peterbua tổ chức hội nghị khoa học. Nhà toán học nổi tiếng Pafnutui Lvovits Trebusev (16.5.1821 - 8.12.1894), đã mời bà tham gia hội nghị và báo cáo luận án. Bà đã lục từ đáy rương một bài mà bà đã viết cách đó 6 năm về tích phân. Tuy vậy bài phát biểu đã làm chấn động hội nghị.

Tháng 12-1888, Viện Hàn lâm khoa học Pháp đã phong tặng cho bà bằng tiến sĩ về những nghiên cứu kiệt xuất của bà đối với sự vận động của con quay. Năm 1889, Viện Hàn lâm khoa học Thụy Điển cũng tặng thưởng cho bà. Tháng 11 năm đó, do sự thỉnh cầu của nhiều nhà khoa học nổi tiếng mà Viện Hàn lâm khoa học Nga đã hủy bỏ quyết định trước đây là không chấp nhận các nhà khoa học nữ vào làm việc ở viện. Trong bức điện chúc mừng của các nhà khoa học Nga gửi X.V.Covalevxkaia có đoạn viết :

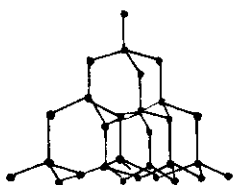
"Sau khi thay đổi quyết định mà từ trước tới nay chưa hề có, Viện Hàn lâm khoa học nước ta vừa thống nhất để cử bà làm viện sĩ thông tấn. Chúng tôi vô cùng vui mừng thấy một trong những yêu cầu chính đáng và bức thiết đã được thực hiện".

Đây là người phụ nữ đầu tiên trở thành viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Peterbua và có lẽ cũng là người phụ nữ đầu tiên trở thành viện sĩ trên thế giới. Ngoài các đóng góp cho toán học như vừa nêu X.V. Covalevxkaia còn nhiều công trình toán học khác.

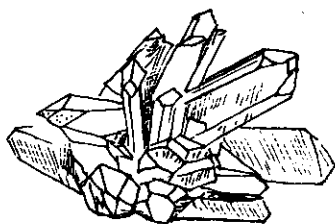
Đầu năm 1891, X.V. Covalevxkaia bị bệnh, qua đời trên đường từ Pháp về Nga. Sự nhầm lẫn của thầy thuốc đã cướp đi sinh mệnh của một tài năng chói lọi. Lúc đó bà X.V. Covalevxkaia mới 42 tuổi.

25. KHÀM MẶT PHẪNG THEO DẠNG TINH THỂ

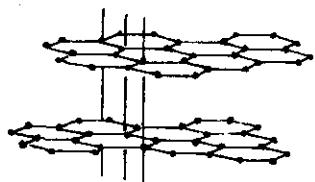
Khăm vào mặt phẳng làm cho đồ vật đẹp lên đến kinh ngạc. Một mảnh kim cương sáng bóng lại cực kì cứng, đó là do những nguyên tử cacbon thường gặp nhất tạo nên. Nó được sắp xếp rất trật tự để tạo thành tinh thể thuần khiết (hình 25-1), có độ cứng 10 (vua về độ cứng). Một mẫu thạch anh trong suốt hình trụ lục giác bằng đá hoa cương (hình 25-2).



Hình 25-1



Hình 25-2



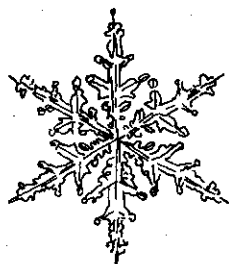
Hình 25-3

Dầu ngòi bút máy mà ta thường gọi là hạt tấm, thường được làm bằng nguyên liệu gọi là thạch mực. Khi ngòi bút di động, lớp thạch mực trơn nên dễ chạy trên mặt giấy. Tính chất này của thạch mực là do nguyên tử bên trong được cấu tạo thành mặt bằng theo nguyên tắc nhất định, sau đó lại cứ các lớp như vậy (hình 25-3). Điều làm cho

người ta ngạc nhiên là các tinh thể thạch mực không rơi rụng, và nó được các nhà khoa học gọi là kim cương.

Đến nay trên thế giới đã phát hiện được hơn 2000 loại mỏ khoáng chất, nhưng tinh thể không chỉ có ở khoáng chất. Tinh thể của những loại khác trong tự nhiên cũng có nhiều. Dưới kính hiển vi phóng đại ta quan sát được bông tuyết, có thể

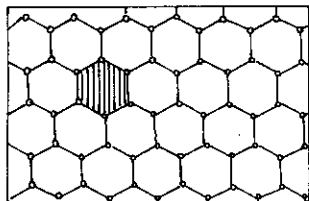
nhìn thấy đó là do nhóm tinh thể 6 góc tạo thành (hình 25-4). Nhưng không bao giờ có hai bông tuyết giống nhau hoàn toàn.



Hình 25-4

Năm 1885 nhà địa chất trẻ tuổi E.C. Phedorov (1863 - 1919) người Nga đã chứng minh rằng, kết cấu của tất cả các tinh thể chỉ có thể có 230 loại yếu tố đối xứng khác nhau tập hợp lại mà thành. Kết luận này đã làm chấn động giới khoa học. Nhưng nhờ kết luận này mà ông được Viện Hàn lâm khoa học Peterbua bầu làm viện sĩ. Điều thú vị là, chứng minh của ông lại không đề cập gì đến hóa học, mà chỉ sử dụng toán học như là công cụ chính. Sau đó, năm 1912 các nhà khoa học Đức và Anh đã dùng X quang để soi tinh thể và đã tận mắt nhìn thấy các tinh thể được sắp xếp theo một quy luật. Nhờ đó người ta đã chứng minh tính đúng đắn trong kết luận của E. C. Phedorov.

Nếu muốn giải quyết triệt để luận chứng của E.C. Phedorov thì cần dùng những hiểu biết sâu sắc về hóa học. Nhưng nếu chuyển từ không gian sang mặt phẳng thì sẽ giúp chúng ta dễ giải thích hơn.



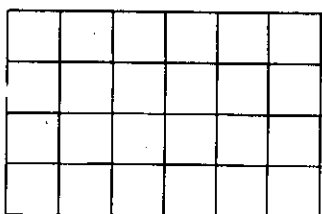
Hình 25-5

Hình 25-5 mô tả một lớp tinh thể thạch mặc. Mẫu 6 cạnh đều trong hình 25-5 chỉ nguyên tử cacbon. Mỗi hình 6 cạnh đều (lục giác) này là một đơn vị. Các động tác làm cho bề mặt không thay đổi, như chuyển động thẳng, tròn, quay đã tạo nên nhóm đối xứng của mặt. Khái niệm nhóm đã được đề cập ở mục 8.

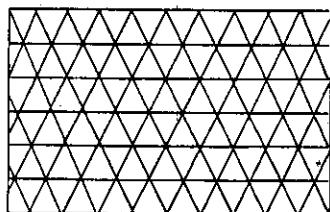
Người ta đã dùng toán học để chứng minh được rằng, đối xứng của mặt có 17 loại.

Có các loại bề mặt mà ta có thể dùng hình đa giác đều (hình có tất cả các cạnh và các góc bằng nhau) để khảm thành mặt phẳng. Do vậy có thể tạo ra những đồ án hết sức đẹp. Thường thức những hình ghép này sẽ làm cho ta thú vị.

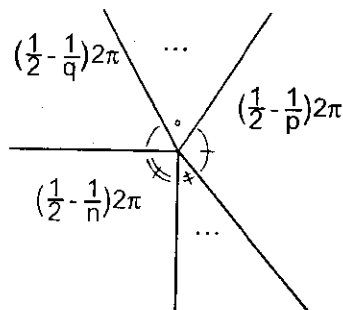
Nếu trên mỗi bức khảm đều dùng hình đa giác đều giống nhau thì loại khảm đó gọi là khảm đều. Hình 25-5 là loại dùng lục giác đều, còn hình 25-6 dùng hình vuông, hình 25-7 thì dùng tam giác đều.



Hình 25-6



Hình 25-7



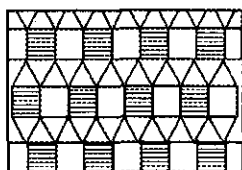
Hình 25-8

Nếu do các đa giác đều tạo nên thì cần phải làm cho góc trong của nó lấp kín một góc đầy. Do góc trong của đa giác đều n cạnh là $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})2\pi$, cho nên yêu cầu vừa nêu ở trên tương đương với việc tồn tại một nhóm số nguyên $n, p, q, r, \dots, t$ sao cho (hình 25-8) :

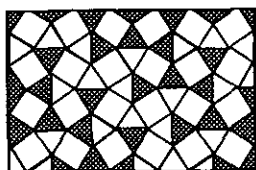
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right) = 1. \quad (25-1)$$

Phương trình vô định bậc 1 (25-1) có 17 nhóm nghiệm nhưng trong đó chỉ có 10 nhóm thích hợp :

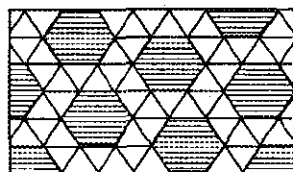
- 1) $n = 3, p = 3, q = 3, r = 3, s = 3, t = 3$ (hình 25-7).
- 2) $n = 3, p = 3, q = 4, s = 4$ (hình 25-9 a, b).
- 3) $n = 3, p = 3, q = 3, r = 3, s = 6$ (hình 25-10).



a)



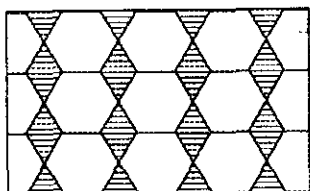
b)



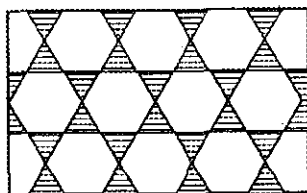
Hình 25-10

Hình 25-9

4) $n = 3, p = 3, q = 6, r = 6$ (hình 25-11 a, b)



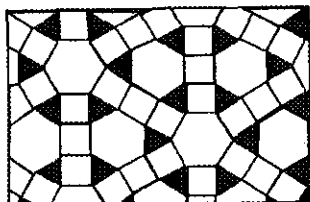
a)



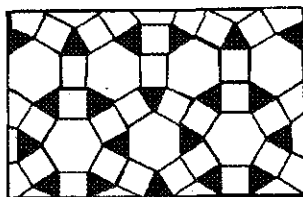
b)

Hình 25-11

5) $n = 3, p = 4, q = 4, s = 6$ (hình 25-12a, b).



a)



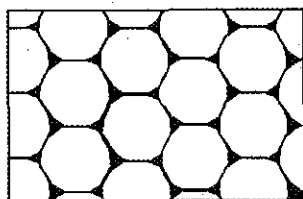
b)

Hình 25-12

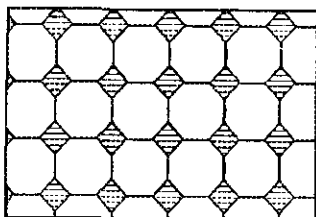
6) $n = 3, p = 12, q = 12$
(hình 25-13).

7) $n = 4, p = 4, q = 4$
(hình 25-6).

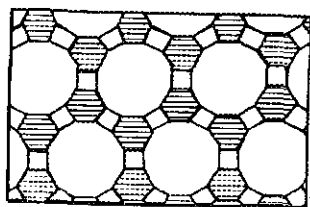
8) $n = 4, p = 8, q = 8$
(hình 25-14).



Hình 25-13



Hình 25-14



Hình 25-15

9) $n = 4$, $p = 6$, $q = 12$ (hình 25-15).

10) $n = 6$, $p = 6$, $q = 6$ (hình 25-5).

Ngoài 10 nhóm ở trên, còn có 7 nhóm số nguyên (7 nghiệm) nhưng chúng chỉ có thể làm cho các đỉnh thỏa mãn kiểu quan hệ chứ không thể khảm đều bề mặt (bảng 25-1).

Bảng 25-1

Bảng nhóm số nguyên còn lại

Số nguyên Nhóm	n	p	q	s	Ghi chú
11	3	10	15	-	
12	3	9	18	-	
13	3	8	24	-	
14	4	5	20	-	
15	3	3	4	12	Có hai loại
16	5	5	10	-	
17	3	7	42	-	

Nhờ máy tính điện tử nên các hình ghép ngày càng phong phú.

Một bài toán thú vị của nghệ thuật ghép mảnh là phủ đầy một mặt phẳng bằng các đa giác đều đồng dạng. Gọi n là số cạnh của mỗi đa giác đều đó thì góc trong tại mỗi đỉnh của một đa giác đều như vậy sẽ bằng $(n - 2) \cdot 180^\circ / n$. Người ta đã chứng minh được rằng :

1 - Nếu ta không để một đỉnh của một đa giác đều như vậy nằm trên cạnh của một đa giác đều khác thì số các đa giác đều tại mỗi đỉnh là $(2 + 4) / (n - 2)$, do đó ta phải có $n = 3 ; 4$ hoặc 6 .

2 - Nếu đỉnh của một đa giác đều như vậy nằm trên cạnh của một đa giác đều khác thì số các đa giác đều tụ lại tại một đỉnh sẽ là $(1 + 2) / (n - 2)$, do đó ta phải có $n = 3$ hoặc 4 .

3 - Nếu tại một đỉnh có cả ba loại đa giác đều thì

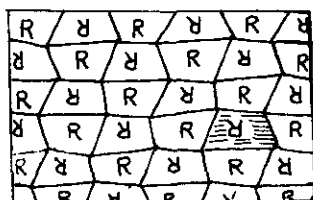
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad (25-2)$$

trong đó p, q, r là số cạnh của từng loại đa giác đều.

Giải (25-2) được $p = 4 ; q = 6$ và $r = 12$.

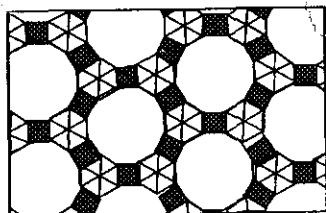
Lí thuyết về các hình đa giác khảm mặt phẳng rất có tác dụng trong xây dựng, kinh tế, ...

Để lát sàn bằng gỗ, lát nền bằng đá xé, ... nhiều khi người ta đã tận dụng những mẫu bất kì (nếu không tận dụng sẽ trở thành vật liệu bỏ đi), ghép lại vẫn được mặt khảm đẹp, chỉ cần tại mỗi đỉnh thì các góc hợp thành 360° . Đây là một ứng dụng sáng tạo của toán học vào đời sống. Hình 25-16 là một ví dụ.

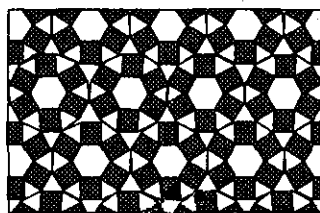


Hình 25-16

Điều cần nói là, có những miếng khảm không đồng đều nhưng vẫn có thể sửa chữa cho đều để khảm thành mặt đẹp như hình 25-17 và hình 25-18.



Hình 25-17



Hình 25-18



Hình 25-19

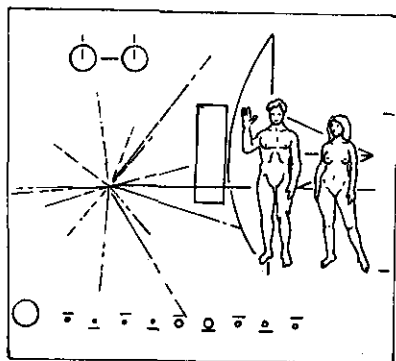
Còn để lấp kín mặt cầu, như trên quả bóng đá bằng da đạt tiêu chuẩn quốc tế mà đơn vị tài trợ là Công ty Động Lực đã sản xuất để dùng cho Giải bóng đá vô địch quốc gia và Cup bóng đá thiếu niên, nhi đồng toàn quốc 1999, người ta đã dùng các hình lục giác đều và ngũ giác đều (hình 25-19).

26. MA PHƯƠNG CỦA THẾ GIỚI TOÁN HỌC

Trái Đất luôn chuyển động trong không gian vũ trụ. Những sinh linh đầy lí trí sống trên Trái Đất đã được tích lũy hàng nghìn vạn năm và người ta sẽ hỏi : trên hành tinh khác liệu có sự sống có trí tuệ cao hơn chúng ta hay không ?

Ngày nay loài người đã chinh phục được Mặt Trăng và phái sứ giả của mình vào không trung để thám thính. Nếu đến một ngày nào đó ta lại phát hiện ra ở đâu đó trong vũ trụ có sinh vật cao cấp sống thì sẽ lấy gì để làm vật trung gian ?

Tháng 3-1972 và tháng 4-1973, Mỹ đã phóng hai vệ tinh "Người tiên phong 10" và "Người tiên phong 11" để thám thính vũ trụ. Hai con tàu này đã hoàn thành nhiệm vụ thám thính Thái Dương Hệ và đi xa hơn nữa. Cả hai con tàu đều mang bảng kim loại trên đó có hình tượng trí tuệ sống trên Trái Đất, một nam và một nữ (hình 26-1). Bức họa có hình ảnh bên ngoài con tàu và điểm xuất phát của con tàu.

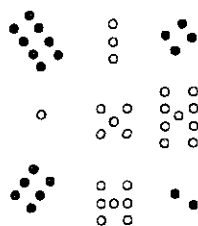


Hình 26-1

Năm 1977, Mỹ lại phóng hai vệ tinh "Người lữ hành" vào vũ trụ. Lần này có mang theo âm thanh và dấu hiệu của Trái Đất, trong đó có 115 bức ảnh về Vạn lý trường thành của Trung Quốc, 35 loại âm thanh tự nhiên, 60 loại câu hỏi và 27 bài hát của một số dân tộc trên thế giới. Những thứ đó đều có ý tự giới thiệu về Trái Đất với "Người vũ trụ". Nhưng không biết "Người vũ trụ" có hiểu được không ?

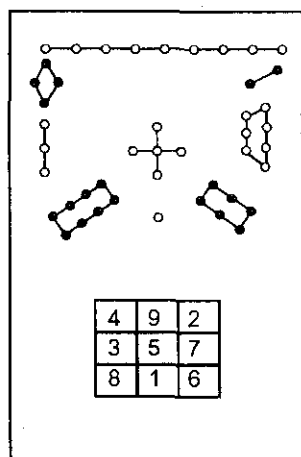
Giáo sư toán học Hoa La Canh cho rằng, để nối hai hành tinh chưa biết với nhau thì tín hiệu tốt nhất là hai bức ảnh : một bức là hình (hình 11-7) và một bức là số (hình 26-2).

Hình 11-7 là nội dung của định lý Pythagores đã nói ở mục 11 và đã được hai trạm thăm dò Voyager 1 và 2 của Mỹ phóng lên vũ trụ ngày 8-9-1977.



Hình 26-2

Hình 26-2 là nội dung của cuốn sách của thế giới văn minh, bắt nguồn từ nền văn minh Trung Hoa cổ đại, gọi là "Lạc thư".



Hình 26-3

Truyền thuyết kể rằng, vào thời Đại Vũ (2205 - 2197 trước Công nguyên), khi vua đi thuyền trên sông Lạc (một nhánh của sông Hoàng Hà) thấy một con rùa lớn nổi lên mang trên lưng các chấm đen và trắng. Các cụm chấm đen là các số chẵn 2, 4, 6, 8 ; các cụm chấm trắng là các số lẻ 1, 3, 5, 7, 9. Vua thấy lạ nên cho ghi lại và sau đó cho xếp các số thành Chín trù, mệnh danh là Hồng Phạm và gọi là "Lạc thư" hay "Quy thư" (hình 26 - 3).

"Lạc thư" có 9 ô, lấp đầy các số từ 1 đến 9. Người Trung Hoa còn gọi "Lạc thư" là "phương trận". Từ Nhạc đời nhà Hán gọi "Lạc thư" là "cửu cung toán". Về sau "Lạc thư" phát triển rất nhanh, trở thành hình ngang dọc có bậc n (n hàng ngang và n hàng (cột) dọc), gọi là "tung - hoành đồ". "Tung - hoành đồ" là một hình vuông gồm n^2 số nguyên khác nhau được sắp xếp sao cho có tổng các số của hàng ngang, cột dọc, đường chéo bằng nhau và bằng một hằng số gọi là *hằng số biến đổi* hoặc *hằng số ma* (N_n). Ngoài ra các "tung - hoành đồ" còn có các tính chất kì lạ chưa tưởng tượng hết.

Ta đã biết :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{1}{2} n^2(n^2 + 1). \quad (26-1)$$

Đây chính là công thức tính tổng của tất cả các số trong "tung - hoành đồ" chuẩn (khi n^2 số là các số nguyên dương đầu tiên).

Ví dụ :

- với "tung - hoành đồ" ba bậc ($n = 3$) :

$$\frac{1}{2} \cdot 3^2(3^2 + 1) = 45 ;$$

- với "tung - hoành đồ" bốn bậc ($n = 4$) :

$$\frac{1}{2} \cdot 4^2(4^2 + 1) = 136 ;$$

.....

Tổng (26-1) chính là tích của hằng số biến đổi (N_n) và bậc (n) của "tung - hoành đồ". Do vậy hằng số biến đổi của "tung - hoành đồ" chuẩn bậc n là :

$$N_n = \frac{1}{2} n(n^2 + 1). \quad (26-2)$$

Ví dụ :

- với "tung - hoành đồ" bậc ba ($n = 3$) :

$$N_3 = \frac{1}{2} \cdot 3(3^2 + 1) = 15 ;$$

- với "tung - hoành đồ" bậc bốn ($n = 4$) :

$$N_4 = \frac{1}{2} \cdot 4(4^2 + 1) = 34 ;$$

.....

"Tung - hoành đồ" truyền sang Ấn Độ được tượng trưng cho sự tốt đẹp. Đến nay nhiều phụ nữ Ấn Độ vẫn còn dùng "tung - hoành đồ" bậc ba (Lạc thư) đeo trước ngực để làm bùa hộ mệnh. Hình 26-4 là "tung - hoành đồ" bậc bốn, được khắc trong các chùa ở Ấn Độ vào thế kỉ XI. Ngoài các tính chất chung đã nêu, "tung - hoành đồ" này còn :

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Hình 26-4

1. Có 85 nhóm bốn số mà tổng của chúng đều bằng hằng số biến đổi N_4 ($N_4 = 34$) ;
2. Nếu lấy hàng bên đưa vào hàng bên khác thì hàng mới tạo thành "tung -hoành đồ" mới ;
3. Tổng các số trên hai đường chéo bằng tổng các số còn lại ;
4. Tổng bình phương các số của hàng 1 bằng tổng bình phương các số của hàng 3, bằng tổng bình phương các số của cột 1, bằng tổng bình phương các số của cột 3 ;
5. Tổng bình phương các số của hàng 2 bằng tổng bình phương các số của hàng 4, bằng tổng bình phương các số của cột 2, bằng tổng bình phương các số của cột 4 ;
6. Tổng bình phương các số của hai hàng phía trên bằng tổng bình phương các số của hai hàng phía dưới ;
7. Tổng bình phương các số của hai cột trái bằng tổng bình phương các số của hai cột phải ;

.....
Thế kỉ XV có người giới thiệu "'tung -hoành đồ" sang châu Âu và ở đó người ta gọi là "ma phương", "ảo phương", "hình vuông ảo", ... Ma phương xuất hiện sớm nhất ở châu Âu trong tác phẩm bằng đồng có tên "Melancholia" (Ưu uất) của họa sĩ Albrecht Diirer (1471 - 1528) khắc vào năm 1514 (hình 26-6). Điều thú vị là ông đã khắc cả năm sáng tác vào trong đó (hai ở giữa hàng cuối). Ở châu Âu có nhiều người nghiên cứu ma phương và đã thu được nhiều kết quả.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Hình 26-5

Ngoài các tính chất chung đã nêu, ma phương ở hình 26-5 còn có các tính chất :

1. Tổng bình phương các số của hai hàng phía trên bằng tổng bình phương các số của hai hàng phía dưới ;
2. Tổng bình phương các số của hai hàng 1 và 3 bằng tổng bình phương các số của hai hàng 2 và 4 ;
3. Tổng các số trên hai đường chéo bằng tổng các số còn lại ;
4. Tổng bình phương các số trên hai đường chéo bằng tổng bình phương các số còn lại ;
5. Tổng lập phương các số trên hai đường chéo bằng tổng lập phương các số còn lại ;

Hình 26-6 là các số trên các viên gạch còn giữ tại phòng triển lãm ở châu Âu.

Bất cứ hình vuông nào với 5×5 ô ở hình 26-6 cũng tạo thành ma phương bậc năm.

Hình 26-7 là tấm sắt thời Nguyên (thế kỉ XIII - thế kỉ XIV)

1	15	24	8	17	1	15	24	8	17	1	15	24	8	17
23	7	16	5	14	23	7	16	5	14	23	7	16	5	14
20	4	13	22	6	20	4	13	22	6	20	4	13	22	6
12	21	10	19	3	12	21	10	19	3	12	21	10	19	3
9	18	2	11	25	9	18	2	11	25	9	18	2	11	25
1	15	24	8	17	1	15	24	8	17	1	15	24	8	17
23	7	16	5	14	23	7	16	5	14	23	7	16	5	14
20	4	13	22	6	20	4	13	22	6	20	4	13	22	6
12	21	10	19	3	12	21	10	19	3	12	21	10	19	3

Hình 26-6

đào được ở Thiểm Tây (Trung Quốc) năm 1956. Trên mặt tấm

PA	N	W	W	W	10
W	W	VI	NN	II	I
V	W	IP	IV	PP	PO
A	W	Iq	Iy	py	pq
S	PO	IS	IS	PS	WP
PV	W	W	y	P	q

Hình 26-7

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

Hình 26-8

sát này khắc ma phương bậc sáu bằng số Arập cổ đại, được dịch ra như ở hình 26-8.

Theo các nhà khảo cổ học, những ma phương này có thể là của người Tây Vực đến. Quá trình có thể là : con cháu của Thành Cát Tư Hãn (1162 - 1227) người Trung Hoa khi đưa quân chinh chiến đã để lại các ma phương này chôn cùng người thân.

Ở Nhật Bản, thế kỉ XVII có nhiều người nghiên cứu ma phương, như Jso Mura, Seki Kowa, ...

Ở Việt Nam, Nguyễn Hữu Thiện (đời Nguyễn) cũng đã bàn về ma phương.

Nếu chúng ta tưởng tượng xếp ma phương ở hình 26-3 trên một tờ giấy sau đó xoắn tờ giấy lại nửa vòng (180°) và dán hai mép lại với nhau thì thấy các con số cánh mép dán từng đôi đều có tổng bằng 10. Một tờ giấy được xoắn như thế gọi là một lá Mebius.

Thường có ba loại câu hỏi đối với ma phương :

1. Đối với những số n nào thì ma phương bậc n tồn tại được ?
2. Nếu ma phương tồn tại được thì cấu tạo của nó như thế nào ?
3. Nếu n cố định thì có bao nhiêu loại ma phương ?

Đối với câu hỏi 1, người ta đã giải quyết được từ lâu rồi, với câu trả lời là khi $n \geq 3$ thì bất kì n là số nguyên nào cũng tồn tại ma phương.

Đối với câu hỏi 2, năm 1275 nhà toán học Dương Huy đã có đáp án. Ông cho

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Hình 26-9

ràng, nếu $n = 4$, với các số tự nhiên từ 1 đến 16 ta có thể sắp xếp thành ma phương như hình 26-4, hình 26-5 hoặc hình 26-9, ... trong đó tổng các số của cột dọc, hàng ngang và đường chéo đều bằng hằng số biến đổi N_4 ($N_4 = 34$).

Có một cách tạo được dễ dàng các ma phương có bậc chẵn kép (tức là có bậc chia hết cho 4). Hãy nhìn vào hình 26-10a. Trước tiên ta kẻ hai đường chéo. Bắt đầu từ góc trên bên trái đếm từ trái sang phải, từ trên xuống dưới nhưng vòng đầu bỏ qua các ô có gạch chéo, sau đó dùng các số còn lại từ lớn đến nhỏ cũng đếm như vậy để lấp đầy những ô gạch chéo, ta được ma phương như ở hình 26-10b.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

a)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

b)

Hình 26-10

Bây giờ cũng quy tắc như trên, áp dụng cho ma phương có bậc $4n$. Ta vẽ đường chéo của tất cả n^2 hình vuông có 4×4 (hình 26-11a), ta sẽ được ma phương như ở hình 26-11b.

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

a)

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

b)

Hình 26-11

Sau đây chúng ta nghiên cứu cấu tạo của ma phương ngẫu số nửa dòng (tức là có bậc không chia hết cho 4) nhưng chia hết cho 2. Có một phương pháp gọi là *phương pháp tăng lớp* (gia tăng). Ví dụ với ma phương bậc sáu, ta làm như sau : từ ma phương bậc bốn, ta thêm bốn hàng xung quanh để thành (hình 26-12).



Hình 26-12

Do ma phương bậc sáu có 36 số (36 ô), ma phương bậc bốn chỉ có 16 số, cho nên phải thêm 20 số nữa. Nhưng 20 số này phải bỏ 10 số đầu và 10 số cuối, để lại các số từ 11 đến 26, tạo thành trung tâm ma phương. Lúc đó bằng số biến đổi mới $N'_4 = N_4 + 40 = 34 + 40 = 74$. Chú ý là

$N_6 = \frac{6}{2} (6^2 + 1) = 111$ (công thức (26-2)) thì có thể biết được cần điền thêm ở hai hàng có tổng từng cặp hai ô đối xứng là $N_6 - N'_4 = 111 - 74 = 37$. Từ đó ta thấy, chỉ có thể chọn tương ứng hai ô A và B như sau :

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27

Do tổng bốn số ở nhóm B ít nhất là $30 + 29 + 28 + 27 = 114$, còn nhóm A nhiều nhất là $7 + 8 + 9 + 10 = 34$, nên dễ dàng suy ra ở hàng ngang hay cột dọc cũng đều chỉ có thể là số của ba nhóm A và ba nhóm B tạo nên. Nếu nhóm này có bốn số nhóm A thì tổng sáu số ở hàng đó không lớn hơn $34 + 35 + 36 = 105$. Điều này mâu thuẫn với tổng của hàng đó là $N_6 = 111$. Tổng của sáu số trong hàng đó nhất định không nhỏ hơn $114 + 1 + 2 = 117$. Điều này cũng mâu thuẫn với tổng của hàng đó là $N_6 = 111$.

Bây giờ ta chọn 1 và 2 làm số ở hai góc, ô trống ở hàng thứ nhất là x , $37 - x_1$, $37 - x_2$, $37 - x_3$. Ở đây x , x_1 , x_2 , x_3 quy định đều là số của nhóm A.

Do ta đã biết :

$$1 + x + (37 - x_1) + (37 - x_2) + (37 - x_3) + 2 = 111. \quad (26-3)$$

Cho nên :

$$3 + x = x_1 + x_2 + x_3. \quad (26-4)$$

Do $x \leq 10$, nên ta có thể lấy $x = 9$ hoặc $x = 10$.

Nếu $x = 9$ thì theo (26 - 4) ta có $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.
Từ đó có thể suy ra kết quả như hình 26-13.

1	9				2
6					
10					
					7
					8
35		3	4	5	36

Hình 26-13

1	10	34	33	31	2
7	11	25	24	14	30
8	22	16	17	19	29
32	18	20	21	15	5
28	23	13	12	26	9
35	27	3	4	6	36

Hình 26-14

Nếu $x = 10$ thì $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$. Từ đó có thể suy ra kết quả ở hình 26-14.

Đối với câu hỏi 3, đến nay người ta đã biết là có 880 loại ma phương bậc bốn, 275 305 224 loại bậc năm, còn các loại ma phương khác lại là một nhánh khác rất đa dạng và phong phú của toán học : *toán học tổ hợp*. Ở đây không có điều kiện nên không giới thiệu.

0	62	2	60	11	53	9	55
15	49	13	51	4	58	6	56
16	46	18	44	27	37	25	39
31	33	29	35	20	42	22	40
52	10	54	8	63	1	61	3
59	5	57	7	48	14	50	12
36	26	38	24	47	17	45	19
43	21	41	23	32	30	34	28

Hình 26-15

Ở trên ta đã thấy, các số tạo nên ma phương là các số tự nhiên liên tiếp, bắt đầu từ 1. Tất nhiên có loại ma phương là các số tự nhiên liên tiếp nhưng không phải bắt đầu từ 1. Ma phương ở hình 26-15 bắt đầu từ 0, kết thúc là 63 (có tám bậc, nên $8 \times 8 = 64$ ô). Ma phương này cũng có các

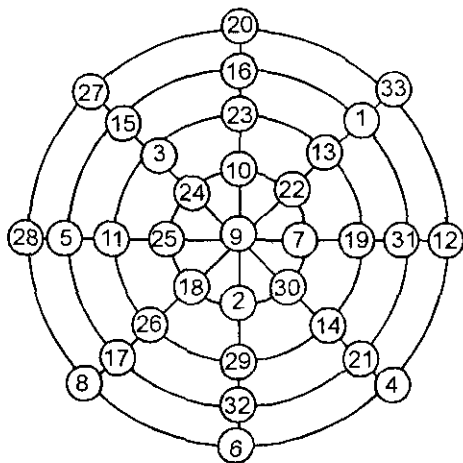
tính chất chung như đã nêu ở trên nhưng hàng số biến đổi N_8 không phải tính theo (26-2), tức là $N_8 = 260$, mà là 252. Ngoài ra ma phương này còn có các tính chất là tổng bốn số nằm trên : bốn ô liền nhau, bốn đỉnh của hình chữ nhật có chu vi bằng nửa chu vi ban đầu, bốn đỉnh của hình vuông (bất kì), bốn đỉnh của hình chữ nhật có chu vi bằng $1/4$ chu vi ban đầu là bằng nhau và bằng 126.

	10			7	
17					30
		26	27		
		20	21		
35					12
	37			40	

Hình 26-16

Để thử sức mình, bạn hãy điền vào các ô trống các số tự nhiên từ 5, liên tiếp nhưng không lặp lại các số đã có ở hình 26-16, biết rằng $N_6 = 141$. Kết quả như hình 26-17 ở trang 170.

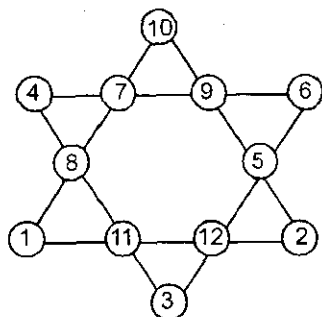
27. BỐN MƯƠI BẢY NĂM VÀ MƯƠI BẢY GIÂY



Hình 27-1

Ở mục 26 bạn đọc đã có dịp tiếp cận với bộ mặt đặc biệt của ma phương. Ở mục này chúng ta mở ra một kì quan nữa trong lĩnh vực này.

Ma phương đã phá vỡ những hạn chế của hơn 7 thế kỉ về trước. Năm 1257 trong cuốn "Tục cổ trích kỉ toán pháp" của Trung Quốc có đưa ra hình 27-1, được gọi là "Tấn cử đồ". Đây là hình tròn kì lạ. Các số tự nhiên từ 1 đến 33 được chia thành bốn đường tròn đồng tâm, ở tâm là số 9 và



Hình 27-2

có bốn đường kính. Tổng các số trên mỗi đường tròn là 138 và trên mỗi đường kính là 147.

Hình 27-2 là ngôi sao sáu cánh. Tổng các số trên mỗi đường thẳng là 26. Hình này tuy đơn giản nhưng rất thú vị.

Những nghiên cứu của nhà toán học Martin Madena người Mỹ đã đạt nhiều kết quả. Như mọi người đã thấy, hàng số biến đổi là rất quan trọng.

Ví dụ, khi ta biết N là hằng số biến đổi của ma phương ba bậc ở hình 27-3, chúng ta sẽ biết số x_5 của ô giữa như sau : Ta đã biết :

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Hình 27-3

$$\left. \begin{aligned} x_2 + x_5 + x_8 &= N ; \\ x_4 + x_5 + x_6 &= N ; \\ x_1 + x_5 + x_9 &= N ; \\ x_3 + x_5 + x_7 &= N . \end{aligned} \right\} \quad (27-1)$$

Cộng từng vế của hệ (27-1) ta có :

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + (x_7 + x_8 + x_9) + 3x_5 = 4N. \quad (27-2)$$

Biến đổi vế trái của (27-2) ta được :

$$3N + 3x_5 = 4N.$$

Vậy :

$$x_5 = \frac{1}{3} N. \quad (27-3)$$

Lợi dụng tính chất này, chúng ta có thể qua ít phép tính là biết được ma phương.

M.Madena suy nghĩ : nếu điền các số từ 1 đến 9 vào bất cứ 9 ô đó thì sẽ xuất hiện điều gì ? Ông phát hiện thấy rằng, bình thường sẽ có một số hàng hoặc đường chéo có tổng số

bằng nhau. Thế là ông đặt câu hỏi : phải chăng đã xuất hiện một hiện tượng gì lạ ? Ông lấy một hàng bất kì và nó có tổng không bằng hàng số biến đổi. Và ông cho rằng, đây là vấn đề "phản ảo". Điều thú vị là 9 số trong hình "phản ảo" hình thành một dạng như hình "một con rồng" (hình 27-4).

1	2	3
8	9	4
7	6	5

Hình 27-4

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
219	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	133	243	100	29	105	152

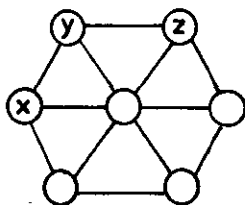
Hình 27-5

Hình 27-5 là ma phương có 8 bậc. Hàng ngang, cột dọc và đường chéo đều có tổng các số là 840 (hàng số biến đổi $N_8 = 840$), đồng thời ở đây tích của chúng cũng cố định, đều bằng 2058068231856000. Thật là kì lạ, không hiểu người ta đã lập ra bằng cách nào ?

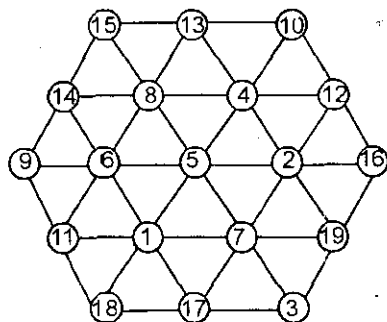
Từ việc nghiên cứu trên mặt phẳng, người ta đã suy luận ra khối lập phương, gồm các số từ 1 đến n^3 số tự nhiên và cũng đều được các tổng số cố định như ma phương. Chỉ có điều là ở khối lập phương kì lạ thì khó khăn hơn nhiều so với ở mặt phẳng. Người ta đã chứng minh được rằng, các khối lập phương bậc ba và bốn thì không tồn tại được, còn các khối lập phương bậc năm và sáu thì hiện nay chưa có câu trả lời là có tồn tại hay không. Nhưng hình khối lập phương bậc bảy thì đã tìm được và khối lập phương bậc tám vừa tìm được vào đầu năm 1970.

Ở trên ta đã nói về hình vuông kì lạ và khối kì lạ. Bây giờ ta xem hình lục giác (sáu cạnh) đều kì lạ.

Năm 1910 người thanh niên tên là Adamxơ đã phát hiện điều thú vị ở hình lục giác đều kì lạ như sau : Hình 27-6 có 7 số (7 ô), gọi là hình lục giác đều kì lạ một lớp :



Hình 27-6

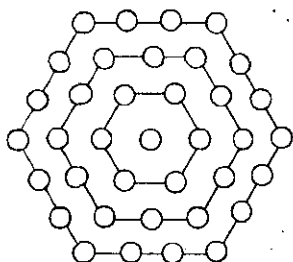


Hình 27-7

ở giữa có 1 số, lớp xung quanh có 6 số. Từ hình 27-6 thấy, nếu tổng các số trên các cạnh bằng nhau, tức là $x + y = y + z$, ta có $x = z$. Điều này không thể có được. Thế là ông đã tập trung nghiên cứu hình lục giác đều kì lạ hai lớp ở hình 27-7, do 19 số tạo nên (lớp 2 có 6×2 số). Ông đã tập trung toàn bộ thời gian nhàn rỗi của mình để sắp xếp 19 số từ 1 đến 19. Suốt 47 năm trời, trải qua bao thất bại nhưng ông vẫn kiên trì.

Năm 1957, một hôm Adamxơ đang nằm trên giường bệnh, ông bật ra ý tưởng tuyệt vời và tìm giấy bút ghi lại. Sau đó ông xuất viện nhưng về nhà thì không tìm thấy mảnh giấy ghi chép ý tưởng đó đâu nữa. Không nản, ông lại tiếp tục công việc thêm 5 năm nữa. Cuối cùng, vào một ngày của tháng 12 - 1962, ông đã tìm được mảnh giấy ghi chép đã mất trước đây. Ông vô cùng vui sướng, coi nó như của quý và mang nó (hình 27-7) giao lại cho M.Gadena xem xét. Tiến sĩ M.Gadena hết sức ngạc nhiên và liền viết thư cho nhà toán học Terrilge. Terrilge tiếp tục nghiên cứu nó nhưng phải mất rất nhiều thời gian mới hiểu ra rằng, những cố gắng của mình là vô dụng, vì không thể tồn tại hình lục giác đều kì lạ nhiều hơn hai lớp.

Năm 1969, tình cờ một sinh viên đã chứng minh được kết luận của Terrilge là đúng và chứng minh đơn giản như sau :



Hình 27-8

Giả sử hình lục giác đều kì lạ có n lớp, lớp n có $6n$ số (hình 27-8). Số lượng các số của hình lục giác đều kì lạ n lớp là :

$$\begin{aligned} N &= 1 + 6 + 12 + \dots + 6n \\ &= 1 + \frac{1}{2} (6 + 6n)n \\ &= 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned} \quad (27-4)$$

Tổng các số từ 1 đến N là :

$$\begin{aligned} M &= 1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{1}{2} N(N + 1) = \\ &= \frac{1}{2} (3n^2 + 3n + 1) (3n^2 + 3n + 2). \end{aligned} \quad (27-5)$$

Do hình lục giác đều kì lạ có n lớp thì sẽ có $(2n + 1)$ hàng, mà tổng của mỗi hàng đều bằng nhau, cho nên $(2n + 1)$ phải chia hết M .

Từ (27 - 5) biến đổi thành :

$$M = \frac{1}{2} [(2n+1)(n+1) + n^2] [(2n+1)(n+1) + (n^2+1)]. \quad (27-6)$$

Suy ra $n^2(n^2 + 1)$ chia hết cho $(2n + 1)$. Vì n^2 và $(2n + 1)$ nguyên tố cùng nhau (tổng của chúng là $(n + 1)^2$), cho nên $(n^2 + 1)$ phải chia hết cho $(2n + 1)$. Nhưng

$$4(n^2 + 1) = (2n + 1)(2n - 1) + 5. \quad (27-7)$$

Từ (27 - 7) thấy rằng, $(2n + 1)$ phải chia hết

$$(2n + 1)(2n - 1) + 5,$$

tức là $(2n + 1)$ phải chia hết 5. Như vậy chỉ có thể là

$$2n + 1 = 1, \quad (27-8)$$

hoặc $2n + 1 = 5. \quad (27-9)$

Từ (27-8) suy ra $n = 0$. Như vậy hình lục giác đều kì lạ chỉ còn lại là một điểm trung tâm.

Từ (27-9) suy ra $n = 2$. Như vậy hình lục giác đều kì lạ có 2 lớp.

Về sau Alair đưa hình lục giác đều kì lạ vào bộ xử lí của máy tính. Kết quả cho thấy, trong 17 giây máy tính đã có kết quả giống như kết quả mà Adamxơ đã mất 47 năm tìm kiếm. Nhờ máy tính người ta có thể biến đổi hình vuông kì lạ (ma phương) thành các hình vuông kì lạ có hàng nghìn, hàng vạn lớp. Nhưng đối với hình lục giác đều kì lạ thì chỉ có một trường hợp, đó là hình lục giác đều hai lớp như hình 27-7 do Adamxơ tìm ra mà thôi ! Tuy vậy, để có được hình lục giác đều kì lạ này ông đã phải mất 47 năm !

28. TRÒ CHƠI CÀM CHẮC PHẦN THẮNG

Đối với một nhà toán học, một đối sách hoặc một trò chơi có ý nghĩa thì thường không cần phải đến hồi kết thúc vẫn có thể thấy trước kết cục ra sao. Thậm chí có khi mới bắt đầu đã thấy cơ hội chiến thắng. Sau đây là trò chơi đối sách cổ điển nổi tiếng :



Hình 28-1

Có hai người ngồi quanh chiếc bàn tròn (hình 28-1), lần lượt đặt xuống mặt bàn những đồng tiền kim loại. Hai bên giao ước với nhau rằng, những đồng tiền phải có kích thước như nhau và không được đặt hai lần liên, ai đặt đồng tiền cuối cùng là thắng.

Về trò chơi này, các nhà toán học nghĩ gì ? Họ đã trả lời không chút do dự rằng : "Nếu tôi, tôi sẽ chọn đặt trước !".

Đối với các nhà toán học, toàn bộ cách ứng xử của họ là ở trạng thái đối xứng. Coi giữa mặt bàn là tâm, nếu đặt đồng tiền đầu tiên xuống chính giữa mặt bàn, sau đó, theo nguyên tắc đối xứng, cứ mỗi lần đối phương đặt đồng tiền xuống bàn, chúng ta cũng đặt một đồng tiền vào vị trí đối xứng. Chỉ cần đối phương còn có chỗ đặt, phía ta nhất định sẽ có chỗ đặt, cho đến khi đối phương không còn chỗ đặt đồng tiền nữa thì thôi. Kiểu giành phần thắng trong trò chơi như vậy thì trong đầu óc của các nhà toán học là điều rõ ràng.

John von Neumann (3.12.1903 - 8.2-1957) là nhà toán học nổi tiếng, đã sáng tạo ra trò chơi này. Có một lần có người bạn nhờ ông dạy cho trò chơi là : đưa ra 9 con bài tulokho, trong đó A là 1 điểm, còn 8 con bài 2, 3, ... 9 ứng với số điểm của nó. Hai người lần lượt rút từng con bài. Khi đã rút con

bài nào thì phải rút hẳn, không được rút lại. Số điểm của 3 con bài trong tay cộng lại, ai được đúng 15 điểm là thắng cuộc. Vậy làm sao rút bài mà giành phần thắng ?

J.von Neumann suy nghĩ một lúc rồi nói : "Ồ, trò chơi này hay đấy ! Người rút trước sẽ thắng. Những người rút sau, nếu đối phó tốt thì vẫn giữ được thế hòa".



J.von Neumann

Vậy J.von Neumann đã suy nghĩ như thế nào ?

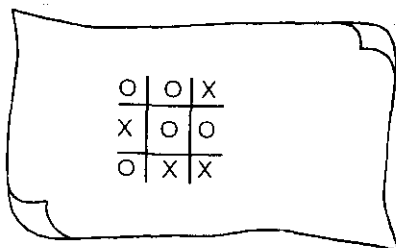
2	9	4
7	5	3
6	1	8

Hình 28-2

Trong mục 26 đã giới thiệu về ma phương. Yêu cầu của trò chơi là 3 con bài trong tay phải có tổng số điểm là 15. Thực ra là đòi hỏi làm thế nào để ba con bài trong hàng ngang, hàng dọc và đường chéo theo phương pháp "Lạc thư" (hình 28-2).

Như vậy, đối sách mà chúng ta đề cập giống với trò chơi đánh caro mà nhiều người đã quen thuộc.

Cách chơi caro như sau : Hai người lần lượt ghi chữ "O" hay chữ "x" vào ô (hình 28-3). Ai ghi được 3 ; 4 hoặc 5 (theo quy định trước lúc chơi) chữ "O" hay chữ "x" liên tục theo đường thẳng (kể cả đường chéo) là thắng cuộc.



Hình 28-3

Thực ra không phải các sách lược quyết thắng của trò chơi đều đơn giản như đã giới thiệu ở trên. Có lúc các nhà toán học sử dụng các thủ thuật toán học trong trò chơi, nó còn vượt trên bản thân trò chơi nhiều.

Năm 1907, nhà toán học Wythoff đã phát hiện ra trò chơi như sau : Có hai người tham gia, thay nhau di chuyển vị trí

các que diêm ở đồng 1 và đồng 2. Khi bắt đầu, số diêm là tùy ý ở mỗi đồng. Giả sử số que diêm ở mỗi đồng là p và q . Chúng ta dùng cặp số có thứ tự (p, q) để biểu thị trạng thái của đồng diêm khi đó.

Nguyên tắc của trò chơi là, mỗi lần có thể dùng một trong ba cách để di chuyển que diêm :

- 1 - Di chuyển một số que diêm ở đồng 1 ;
- 2 - Di chuyển một số que diêm ở đồng 2 ;
- 3 - Di chuyển một số que diêm bằng nhau ở cả hai đồng.

Dùng phương pháp toán học để biểu đạt nguyên tắc này, tức là lấy (p, q) biến thành một trong ba cặp số sau đây : $(p - t, q)$;

$(p, q - t)$; $(p - t, q - t)$.

Do quy định mỗi lần ít nhất là 1 que, cho nên $t \geq 1$. Nhưng việc chọn t quyết định là ở người chơi (hình 28-4), thậm chí có thể di chuyển nguyên cả đồng diêm. Người nào di chuyển que diêm cuối cùng là thắng.



Hình 28-4

Ví dụ, trạng thái ban đầu là $(17, 14)$. Do A đánh trước nên :

A cầm $(16, 13)$, B cầm $(9, 13)$;

A cầm $(9, 7)$,

B cầm $(6, 7)$;

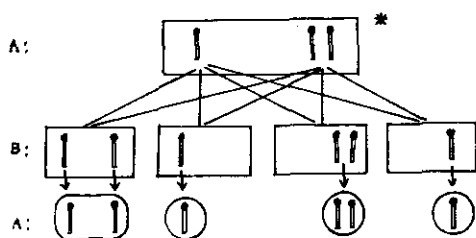
A cầm $(4, 7)$,

B cầm $(4, 2)$;

A cầm $(1, 2)^*$,

B cầm $(1, 1)$, $(0, 1)$,
 $(0, 2)$ hoặc $(1, 0)$;

A cầm $(0, 0)^*$ giành phần thắng (hình 28-5).



Hình 28-5

Như vậy dễ dàng thấy A đã đạt đến cặp số (1, 2) có dấu "*" là quan trọng, vì thực tế lúc đó A đã giành phần thắng, sau đó B không có cách gì để đối phó được, buộc phải thua cuộc. Cho nên chúng ta gọi (1, 2) là vị trí thắng lợi. Đương nhiên (0, 0) cũng là vị trí thắng lợi.

Bắt đầu từ vị trí giành thắng lợi (0, 0) chúng ta có thể suy luận được bảng có vị trí giành phần thắng (bảng 28-1).

Bảng 28-1

Vị trí giành thắng lợi

Thứ tự tính ngược	Vị trí giành thắng lợi (p, q)*	p	q	p - q
1	(0, 0)	0	0	0
2	(1, 2)	1	2	1
3	(3, 5)	3	5	2
4	(4, 7)	4	7	3
5	(6, 10)	6	10	4
6	(8, 13)	8	13	5
7	(9, 15)	9	15	6
8	(11, 18)	11	18	7
9	(12, 20)	12	20	8
:	:	:	:	:

Ví dụ, khi A bắt đầu là (3, 5) thì B đều phải đánh như sau :

B (3, 4) ; A (1, 2)* thắng ;

B (3, 3) ; A (0, 0) thắng ;

B (3, 2) ; A (2, 1)* thắng ;

B (3, 1) ; A (2, 1)* thắng ;

B (3, 0) ; A (0, 0) thắng ;

B (2, 5) ; A (2, 1)* thắng ;

B (1, 5) ; A (1, 2)* thắng.

Vì vậy, có thể rút ra, (3, 5) cũng là vị trí giành thắng lợi, ... Từ đó có thể thấy p, q ở bảng 28-1 có quy luật sau đây :

(1) Cột cuối sắp xếp theo thứ tự số tự nhiên.

(2) Ngoài 0 ra, hai cột p và q không lặp lại và bao gồm tất cả các số tự nhiên.

(3) Giá trị p của các vị trí đều là các số tự nhiên nhỏ nhất chưa hề xuất hiện trước đó trong các vị trí của cột p hoặc cột q.

Dựa vào ba quy luật này, chúng ta có thể kéo dài liên tục vị trí giành phần thắng trong ví dụ nêu ở trên. Ví dụ ở các điểm thắng (m, n) liên ngay sau đó mà chưa được viết ra đều có thể suy luận như sau : Trước hết m là số tự nhiên nhỏ nhất mà phía trước chưa hề xuất hiện, tức là $m = 14$. Mà $n - m = 9$, nên $n = 23$. Vậy điểm thắng tiếp theo là (14, 23). Cứ như vậy mà tiếp tục.

Người ta đã chứng minh được rằng, một khi A đạt đến vị trí thắng thì B tiếp theo sẽ không thể tìm được bất kì điểm thắng nào khác. Ngược lại, nếu B đã tìm được một vị trí nào đó không có trong đó thì A tiếp theo nhất định sẽ có thể tìm được điểm thắng trong đó. Như vậy cũng có nghĩa là, một khi A giành được vị trí thắng thì trên thực tế nó cũng đã thắng rồi. Điều chứng minh này thực ra không có gì khó, vị trí được đề cập đến trong trò chơi này có vẻ như rất dễ dàng. Tuy vậy điều kết luận trong trò chơi này đã hoàn toàn đầy đủ.

Nhưng sự mờ mịt của các nhà toán học thì còn vượt xa những kết luận đó. Năm 1926, giáo sư Sam Beatti ở Trường đại học Toronto (Canada) đã phát hiện điều quan trọng như sau : Đối với một số vô tỉ dương x và số nghịch đảo y của nó, lấy phần nguyên (biểu thị bằng []) của hai hàng thứ tự sau đây :

$$1 + x, 2(1 + x), 3(1 + x), \dots$$

$$1 + y, 2(1 + y), 3(1 + y), \dots$$

ghép lại ta được các số tự nhiên không lặp lại. Trên cơ sở đó người ta chọn số vô tỉ đặc biệt :

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618 :$$

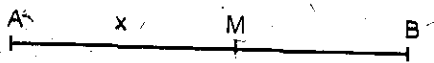
Khi đó :

$$\left\{ \left[n(1+x) \right], \left[n \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \right\}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

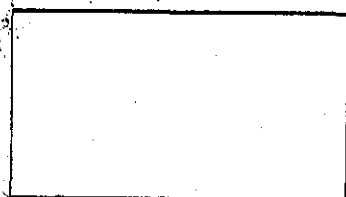
đối với những n khác nhau là những vị trí n thẳng.

Điều làm người ta ngạc nhiên, x ở đây là "con số vàng" và được gọi là "số thần vũ trụ".

"Số vàng" (tỉ lệ vàng) là số mà "điểm chia vàng" M chia được đoạn thẳng AB bằng đơn vị (hình 28-6).



Hình 28-6



1
Hình 28-7

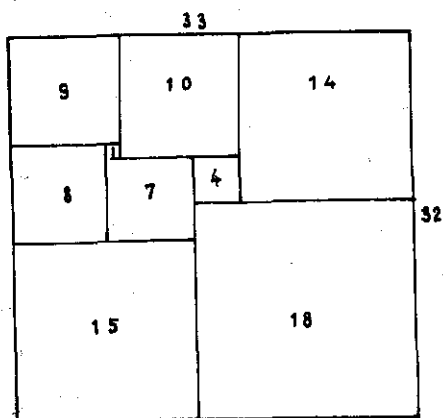
Nếu ta có một hình chữ nhật mà cạnh dài bằng 1 và cạnh ngắn là 0,618 thì được gọi là "hình chữ nhật đẹp" (hình 28-7).

Tỉ lệ này được làm quy tắc thống trị trong kiến trúc, điêu khắc ở Tây Âu, trong các miếu tế thần, trong kim tự tháp cổ

Ai Cập, trong tháp Eiffel, tượng "Nữ thần tự do", lăng tẩm ở Ấn Độ, ... Trong tự nhiên cũng gặp nhiều trường hợp có "con số vàng", như ba lá mọc trên cây tạo thành các góc $137^{\circ}28'$ (chia đường tròn theo tỉ lệ $1 : 0,618$), làm cho độ thông gió, sự tiếp nhận ánh sáng Mặt Trời của lá là tốt nhất. Với con người, tỉ lệ giữa vòng ngực và chiều cao phải được phân bố theo "tỉ lệ vàng" thì mới là cơ thể đẹp. "Số vàng" còn được ứng dụng trong "phép tuyển chọn tối ưu".

29. CÁCH CHIA HÌNH VUÔNG ĐỘC ĐÁO

Trong đời học sinh, ít khi người ta lường hết được ảnh hưởng về sau của họ.

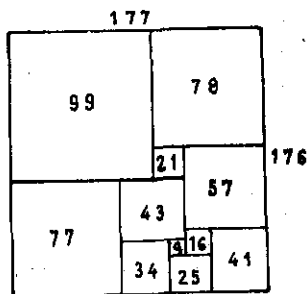


Hình 29-1

Năm 1936 có bốn sinh viên là Tuttle, Stone, Brooks và Smith đã cùng một lúc phát hiện thấy điều kì lạ trong hình vuông. Đó là việc chia cắt hình vuông : chia hình vuông hay hình chữ nhật ra làm các hình vuông có cạnh không bằng nhau. Lúc đó người ta đã biết : một hình chữ nhật có chiều dài 33, chiều rộng 32 thì có thể chia ra các hình vuông như hình 29-1.

Dù cho cả bốn sinh viên này có đề tài nghiên cứu giống nhau, nhưng trọng tâm nghiên cứu của họ thì lại khác nhau.

Stone ngay từ đầu muốn chứng minh : Đối với một hình vuông thì không thể chia thành một số hình vuông không giống nhau. Nhưng Stone không thể làm được việc này. Anh ta lại có thể tìm được những hình vuông từ một hình chữ nhật khác (hình 29-2). Còn Tuttle và hai bạn khác thì vẫn tập trung nghiên cứu lí thuyết về chia hình vuông. Tuy nhiên, họ đều không tìm được kết quả nào. Sau nhiều năm thất bại, họ mới bắt đầu chú ý đến phương pháp Stone.



Hình 29-2

Năm 1939 ở một vùng trên quần đảo Anh, tự nhiên xuất hiện một tiếng sét kinh người và chính lúc đó cũng là lúc mà phương pháp chia hình vuông không giống nhau trong hình vuông được tìm ra. Đó là phát minh của một giáo sư ở Trường

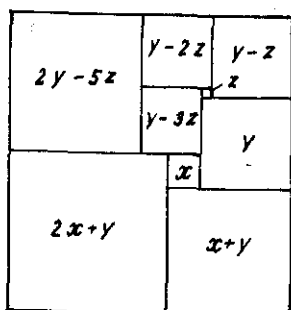
dại học Berlin. Còn đối với Stone, Brooks và các bạn khác, họ không lấy gì làm ngạc nhiên và họ đã nhanh chóng thay đổi phương pháp nghiên cứu của mình, cuối cùng họ đã tìm được một hình vuông có thể được chia ra làm 39 hình vuông khác. Kết quả này càng động viên họ tiếp tục đi sâu nghiên cứu vấn đề này.

Thấm thoát đã mấy chục năm trôi qua, những sinh viên nghiên cứu chuyên đề này đều đã trở thành các nhà đồ họa, các nhà toán học nổi tiếng. Kết quả nghiên cứu của họ đã được áp dụng vào điện tử, hóa học, kiến trúc, tin học, vận trù học, ... trở thành công cụ mang lại hạnh phúc cho loài người.

Vậy bốn sinh viên nêu ở trên đã nghiên cứu việc chia cắt hình vuông như thế nào ?

Câu chuyện không có gì phức tạp : Trước hết họ phác thảo ra một hình chữ nhật chia ra thành các hình vuông. Sau đó, dùng những số chưa biết ít nhất để chỉ các cạnh của hình vuông và tiếp tục viết ra công thức về mối quan hệ được thỏa mãn của các cạnh. Cuối cùng là giải phương trình đó.

Ví dụ, đầu tiên là phác thảo một hình chữ nhật, được chia ra các hình vuông (hình 29-3). Lấy ba cạnh khác nhau x , y và z của ba hình vuông liên nhau. Sau đó, suy luận ra chiều dài của các hình chữ nhật nhỏ hơn :



Hình 29-3

- $x + y ;$
- $2x + y ;$
- $y - z ;$
- $y - 2z ;$
- $y - 3z ;$
- $2y - 5z .$

Bây giờ, từ điều kiện các cạnh của hình chữ nhật tương ứng ta được :

$$\left. \begin{aligned} (2y - 5z) + (y - 2z) + (y - z) &= (2x + y) + (x + y) ; \\ (2x + y) + (2y - 5z) &= (x + y) + y + (y - z), \end{aligned} \right\} \quad (29-1)$$

tức là :

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y + 8z &= 0; \\ x - 4z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29-2)$$

Đây là hệ phương trình bất định bậc 1 ba ẩn.

Giả sử $z = 1$, ta giải (29-2) được $x = 4$ và $y = 10$.

Thay các giá trị này vào hình 29-3 ta được các hình vuông chia cắt ra từ hình chữ nhật 33×32 như hình 29-1.

Rõ ràng, nếu chúng ta tiến thêm một bước các phép thảo là hình vuông thì phải tăng thêm điều kiện

$$(2y - 5z) + (2x + y) = (2x + y) + (x + y), \quad (29-3)$$

$$\text{tức là} \quad x - y + 5z = 0. \quad (29-4)$$

Như vậy hệ phương trình

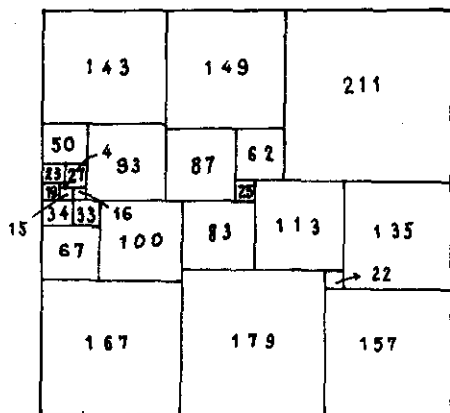
$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y + 8z &= 0; \\ x - 4z &= 0; \\ x - y + 5z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29-5)$$

chỉ có thể có $x = y = z = 0$. Điều này có nghĩa là cách chia hình vuông khác nhau trong hình vuông là điều không thể có được.

Tất nhiên, việc phương trình có nghiệm hay không và có mấy nghiệm, còn phụ thuộc ma trận hệ số. Do những nguyên nhân như vậy mà ngay từ đầu Stone đã cho rằng, không thể chia các hình vuông khác nhau trong hình vuông được.

Sau năm 1939, tức là sau khi người ta tìm được phương pháp chia hình vuông, suốt hơn nửa thế kỉ qua người ta lại tập trung sự chú ý vào vấn đề tìm số nhỏ nhất khi chia hình vuông. Về vấn đề này, nhà toán học nghiệp dư T. H. Wilcorks người Anh đã tìm ra được cách chia hình vuông khi phải dùng 37 bậc. Kỉ lục này được giữ trong thời gian dài, mãi đến khi cũng chính T.H.Wilcorks đã tìm ra cách chia hình vuông chỉ dùng 24 bậc. Nhưng kết quả này chưa làm cho người ta thấy thỏa mãn.

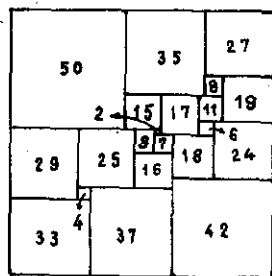
Đến năm 1964, một học trò của Tuttle, là tiến sĩ Weijohn đã tìm được cách chia hình vuông đầy mĩ mãn trên máy vi tính. Mười hai năm sau, năm 1976, người ta lại tìm được cách chia chỉ có 21 bậc, cũng chính nhờ sự giúp đỡ của máy vi tính (hình 29-4). Đây có lẽ là điều có thể làm cuối cùng. Vì về lí thuyết đã chứng minh : không thể tồn tại một hình vuông có thể chia ở bậc bé hơn 20.



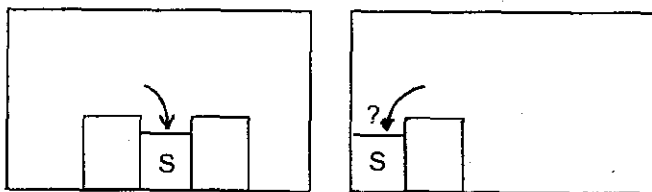
Hình 29-4

Song song với bước phát triển nghiên cứu vấn đề này, cũng không ít người đi sâu nghiên cứu khối lập phương. Nhưng kết quả là mất thời gian mà không đưa lại được điều gì. Vì không khó gì chứng minh được rằng : nếu dùng các khối lập phương không đều nhau để nhét đầy vào một hộp hình chữ nhật là điều không thể được.

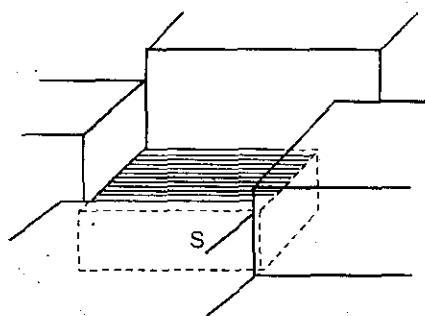
Sự thật là, để nhét đầy bất cứ một cái hộp nào thì cũng phải chia hình vuông ở đáy hộp hình chữ nhật (hình 29-5). Từ hình 29-6 sẽ thấy rõ : tất



Hình 29-5



Hình 29-6



Hình 29-7

cả những khối lập phương tiếp xúc với đáy, dù nhỏ nhất cũng không thể tiếp xúc được với vách đứng, nếu không thì vẫn phải có một khối lập phương khác nhỏ hơn tiếp xúc với đáy. Như vậy, chu vi S sẽ như hình 29-7, nó sẽ được tiếp xúc với những khối lập phương tương đối lớn ở mặt xung quanh. Để che hết bề

mặt S , bắt buộc phải dùng đến những khối lập phương nhỏ hơn (S'). Cũng như vậy, S' phải nằm ở các phần giữa của S . Và cứ tiếp tục như vậy phải có những khối nhỏ hơn nữa (S''), ... đến vô hạn.

30. NHỮNG CỐNG HIẾN CHO CẢ THẦY LÃN TRÒ

Xung quanh ta còn vô số điều chưa biết. Phần lớn những điều chưa biết đó chính là những hạn chế của trí tuệ và tri thức của nhân loại. Nền văn minh và trình độ khoa học mấy nghìn năm nay đã tạo nên con đường để loài người đi từ cái đã biết đến cái chưa biết.

Từ "đại số" (algebra) gặp lần đầu tiên trong cuốn sách của M. ibn M. Al. Khowārizmi ở thế kỉ IX, phần nói về nguyên tắc

giải phương trình. Mãi đến cách đây 1 thế kỉ, nó vẫn nằm trong phạm trù lí thuyết phương trình. Theo dòng thời gian, đến nay nó đã phát triển rất xa từ một khái niệm trừu tượng.

Đối với một thời đại mới thì các lí thuyết cổ đại của phương trình vẫn không mất đi giá trị là nền tảng vững chắc của lâu đài khoa học hiện đại. Nhưng nhân loại không thể cứ lặp lại mãi cái điệp khúc đầy hạn chế trước đây. Cho nên, người ta đã sử dụng phương pháp giáo dục để tìm thấy học chữ. Đây là một nghệ thuật rất cao. Nhà toán học L. Gording người Thụy Điển, trong cuốn "Khái niệm toán học" đã dẫn ra câu chuyện ngụ ngôn có ý nghĩa sâu sắc :

Thầy giáo nói với học sinh trong lớp của ông : tôi nói với các em một khái niệm rất có ích cả trong toán học, vật lí, xã hội học và cả trong đời sống thường ngày. Nó có quan hệ đến hai đại lượng biến đổi x và y , trong đó y phụ thuộc vào x . Nó được định nghĩa như sau (thầy giáo quay mặt vào bảng và viết) :

" y là tỉ lệ thuận với x , nếu có một số a sao cho mỗi giá trị của x và giá trị tương ứng của y , ta đều có $y = ax$."

Sau đó thầy giáo quay lại nhìn cả lớp, thấy chỉ có vài học sinh hiểu được. Ông lại giảng lại : Được rồi, các em xem, tôi vừa viết ra điều gì đó ? Ví dụ, chúng ta giả thiết $a = 2$ (ông lại quay vào bảng).

"Đối với tất cả x thì $y = 2x$ ".

Thầy giáo lại quay lại, nhìn cả lớp, hình như cả lớp đều đã hiểu. Nhưng vẫn còn vài học sinh ngơ ngác.

Ông tiếp tục giảng giải. Được rồi, các em xem, tôi vừa viết gì ? Ví dụ nói rằng, tôi giả thiết $x = 3$ thì $y = 6$ (ông lại viết lên bảng).

$$6 = 2 \cdot 3$$

Thầy giáo quay lại nhìn cả lớp. Lúc này cả lớp đều đã hiểu.

Câu chuyện này in sâu vào mọi người, giúp họ quyết tâm thử tìm con đường phi số học để thực hiện một nấc thang mới hỗ trợ cho trí tuệ của con người. Trải qua hơn 2000 năm lịch

sử đầy chông gai, đã lóe lên những tư tưởng sáng ngời trên nền toán học của loài người. Đây chính là những cống hiến mà người biên soạn cuốn sách nêu trên muốn gửi gắm vào đó.

Chắc chắn nó sẽ giúp ích một phần cho cả thầy lẫn trò.

*

* *

Trả lời mục 26

Kết quả được ma phương như hình 26-17.

36	10	9	38	7	41
17	31	14	15	34	30
23	28	26	27	19	18
24	22	20	21	25	29
35	13	33	32	16	12
6	37	39	8	40	11

Hình 26-17

MỤC LỤC

	Trang
<i>Lời nói đầu</i>	3
1. Khám phá bí mật của "Vụ án chiếc vương miện"	5
2. Thế giới của các kí hiệu phép tính toán học	10
3. Các kí hiệu toán học khác	14
4. Bắc những nhịp cầu hướng tới những điều đã biết	21
5. Có mấy cách giải phương trình bậc 2	24
6. Cuộc thách đố chấn động giới toán học	27
7. Những vinh quang sau khi đã qua đời	34
8. Hai ngôi sao sáng chói trên bầu trời lịch sử toán học	40
9. Điều nghi ngờ về "Vụ án chiếc vương miện"	45
10. Các biểu tượng khắc trên bia mộ	50
11. Ai đã tìm ra định lí Pythagores ?	55
12. Diophantus và bộ ba số tam giác	59
13. Nước Pháp và nước Đức đều treo giải thưởng	65
14. Dùng phương trình giải vài bài toán cổ	71
15. Phát hiện đầu tiên về phương pháp giải tích	80
16. Vén bức màn bí ẩn của ba bài toán cổ điển nổi tiếng về hình học	85
17. Bước ra khỏi quỹ đạo của compa	93
18. Bí ẩn của số ảo	100
19. Điểm bất động thần kì	106
20. Nghệ thuật "tía hoa"	111
21. Bí mật bắt đầu từ quả bi-a	116
22. Từ một chiếc bình có đáy hình bình hành	121
23. Hàn Tín điểm quân	127
24. Nữ hoàng của vương quốc toán học	133
25. Khám mặt phẳng theo dạng tính thể	138
26. Ma phương của thế giới toán học	144
27. Bốn mươi bảy năm và mười bảy giây	153
28. Trò chơi cầm chắc phần thắng	158
29. Cách chia hình vuông độc đáo	163
30. Những cổng hiến cho cả thầy lẫn trò	168

Chịu trách nhiệm xuất bản :

**Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập VŨ ĐƯƠNG THỤY**

Biên tập nội dung :

NGUYỄN MINH LÝ

Biên tập mỹ thuật :

TA TRỌNG TRÍ

Biên tập kỹ thuật :

TRẦN THU NGÀ

Sửa bản in :

MINH LÝ

Sắp chữ :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

CÁC CÂU CHUYỆN TOÁN HỌC

TẬP HAI - CÁI ĐÃ BIẾT TRONG CÁI CHƯA BIẾT

In 5000 cuốn, khổ 14,3x20,3 cm tại Công ty In Khoa học Kỹ thuật - HN

Số in: 344 - Giấy phép xuất bản số: 1536/697 - 00

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2001