# Bài giảng số 8

# CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC

Các bài toán về số phức là chủ đề mới xuất hiện lần đầu trong các đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng năm 2009.

Bài giảng này giới thiệu các bài toán cơ bản nhất về số phức: Các bài toán về môđun số phức, dạng lượng giác của số phức và phương trình xét trên tập các số phức.

## § 1. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ PHỨC VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

**1. Tóm tắt lí thuyết**

- Các phép tính về số phức:

Cho hai số phức Z = a + bi và Z' = a'+b'i. Ta định nghĩa

Z + Z' = (a + a') + (b + b')i,

Z – Z' = (a – a') + (b – b')i.

Cho số phức Z = a + bi. Số phức $\overline{Z}$ = a – bi gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

- Môđun của số phức:

Cho số phức Z = a + bi, ta kí hiệu |Z| là môđun của số phức Z được xác định như sau:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Cho hai số phức Z = a + bi và Z' = a' + b'i. Ta định nghĩa

$$Z.Z' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

- Cho số phức Z = a + bi ≠ 0 (tức là $a^2 + b^2 > 0$). Ta định nghĩa

$$Z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\overline{Z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Nếu Z ≠ 0 thì $\dfrac{Z'}{Z} = Z'Z^{-1}$.

**2. Các dạng toán cơ bản**

**Loại 1**: Các phép tính về số phức:

Các bài toán thường có dạng hoặc đòi hỏi tính toán trực tiếp một biểu thức về số phức, hoặc phải giải một phương trình dạng đơn giản để tìm số phức Z, mà thực chất của phép giải phương trình này chỉ đòi hỏi thực hiện các phép tính về số phức.

***Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2009)***

Tìm phần thực và phần ảo của số phức Z, nếu như ta có

$$(1 + i)^2 (2 - i)Z = 8+i + (1 + 2i)Z.$$

**Giải**

Ta có $(1+i)^2(2-i)Z = 8+i+(1+2i)Z$

$\Leftrightarrow Z[(1+i)^2(2-i)-(1+2i)] = 8+i \Leftrightarrow Z[2i(2-i)-1-2i] = 8+i$

$\Leftrightarrow Z = \dfrac{8+i}{2i+1} = \dfrac{(8+i)(1-2i)}{5} = 2-3i$.

Vậy phần thực của Z là 2 và phần ảo là –3.

***Thí dụ 2:***

Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số $\dfrac{4i}{i-1}$; $(1-i)(1+2i)$; $\dfrac{2+6i}{3-i}$.

1) Chứng minh ABC là tam giác vuông cân.

2) Tìm số phức biểu diễn bởi điểm D, sao cho ABCD là hình vuông.

**Giải**

1) Ta có $\dfrac{4i}{i-1} = \dfrac{4i(i+1)}{-2} = 2-2i$. Vậy A = (2; –2).

$(1-i)(1+2i) = 3+i \Rightarrow$ B = (3; 1).

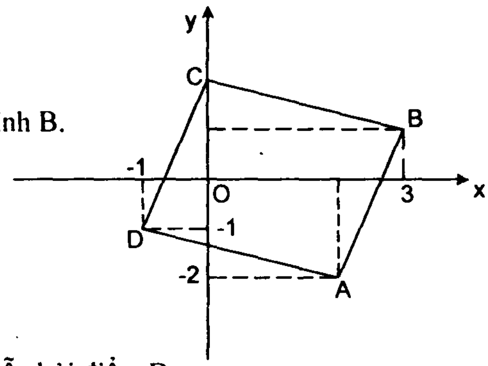
$\dfrac{2+6i}{3-i} = \dfrac{(2+6i)(3+i)}{10} = 2i \Rightarrow C = (0; 2)$.

Từ đó suy ra $BC^2 = 10$;

$BA^2 = 10$; $CA^2 = 20$, nên có

$$\begin{cases} BA = BC \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases}.$$

Vậy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B.




2) Gọi D là đỉnh thứ tư của hình vuông ABCD. Ta có

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow (-1; -3) = (x_D; y_D-2)$

$\Leftrightarrow x_D = -1; y_D = -1$

$\Leftrightarrow D = (-1; -1)$

Vậy số phức $Z = -1-i$ được biểu diễn bởi điểm D.

***Thí dụ 3:***

Giải các phương trình sau:

1) $(2-i)\overline{Z} - 4 = 0$;

2) $\dfrac{2+i}{1-i}Z = \dfrac{-1+3i}{2+i}$.

**Giải**

1) Ta có $(2-i)\overline{Z} - 4 = 0 \Leftrightarrow \overline{Z} = \dfrac{4}{2-i} = \dfrac{4(2+i)}{5}$

$\Leftrightarrow \overline{Z} = \dfrac{8}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

$\Leftrightarrow Z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$.

2) Ta có $\frac{2+i}{1-i}Z = \frac{-1+3i}{2+i} \Leftrightarrow Z = \left(\frac{-1+3i}{2+i}\right) : \left(\frac{2+i}{1-i}\right)$

$\Leftrightarrow Z = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(2+i)^2} = \frac{2+4i}{3+4i}$

$\Leftrightarrow Z = \frac{(2+4i)(3-4i)}{2} = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$.

*Nhận xét*:

Thực chất đây là các bài toán thực hiện các phép tính trên số phức.

***Thí dụ 4***:

Giải các phương trình sau:

1) $Z + 2\overline{Z} = 2 - 4i$,

2) $Z^2 + \overline{Z} = 0$.

**Giải**

1) Xét phương trình $Z + 2\overline{Z} = 2 - 4i$ (1)

Đặt $Z = x + yi \Rightarrow \overline{Z} = x - yi$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow (x + yi) + (2x - 2yi) = 2 - 4i$

$\Leftrightarrow 3x - yi = 2 - 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 4. \end{cases}$

Vậy $Z = \frac{2}{3} + 4i$.

2) Xét phương trình $Z^2 + \overline{Z} = 0$ (1)

Đặt $Z = x + yi \Rightarrow \overline{Z} = x - yi$. Từ đó

(1) $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + x) + (2xy - y)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y(2x - 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - y^2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy (1) có các nghiệm sau : $Z_1 = 0$; $Z_2 = -1$ ;

$Z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; $Z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

*Nhận xét*: Ta đã sử dụng định nghĩa về sự bằng nhau của hai số phức

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b'. \end{cases}$$

***Thí dụ 5:***

Giải phương trình: $\left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^4 = 1$.

<u>**Giải**</u>

Xét phương trình $\left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^4 = 1$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^2 = 1 & (2) \\ \left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^2 = -1. & (3) \end{array}\right.$

Dễ thấy (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{Z+i}{Z-i} = 1 \\ \frac{Z+i}{Z-i} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z+i = Z-i \\ Z+i = -Z+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i = -i \\ Z = 0 \end{array}\right.$ (loại)

Tương tự (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{Z+i}{Z-i} = i \\ \frac{Z+i}{Z-i} = -i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z+i = iZ+1 \\ Z+i = -iZ-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z = \frac{1-i}{1+i} = 1 \\ Z = \frac{-1-i}{1+i} = -1. \end{array}\right.$

Vậy (1) có 3 nghiệm $Z_1 = 0$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = -1$

**Loại 2** : Các bài toán về môđun của số phức:

Các bài toán thuộc dạng này có các dạng cơ bản sau :

- Tính các biểu thức có chứa môđun của số phức
- Tìm tập hợp điểm các số phức nếu như chúng thỏa mãn một điều kiện nào đó về môđun.
- Giải các phương trình có liên quan đến môđun số phức.

***Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)***

Cho $Z_1$, $Z_2$ là nghiệm của phương trình $Z^2 + 2Z + 10 = 0$. Tính đại lượng $A = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$.

<u>**Giải**</u>

Xét phương trình $Z^2 + 2Z + 10 = 0$ (1),

ta có: $\Delta' = 1 - 10 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3i$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z_1 = -1 + 3i \\ Z_2 = -1 - 3i. \end{array}\right.$

Ta có: $|Z_1| = |Z_2| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Vậy A = $Z_1^2 + Z_2^2 = 20$.

***Thí dụ 2 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)***

Cho số phức Z thỏa mãn:

$|Z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $Z.\overline{Z} = 25$. Hãy tìm Z.

**<u>Giải</u>**

Đặt Z = x+yi $\Rightarrow$ $\overline{Z} = x - yi$ $\Rightarrow$ $Z\overline{Z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$.

Ta có |Z – (2+i)| = $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}$ .

Từ đó theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow P(B_2) = C_{20}^2(0,03)^2(0,97)^{18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 10 \\ x^2 + y^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3; y = 4 \\ x = 5; y = 0.\end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l}Z = 3 + 4i \\ Z = 5\end{array}\right.$ là hai số phức cần phải tìm.

***Thí dụ 3 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)***

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z biết rằng |Z – (3 – 4i)| = 2

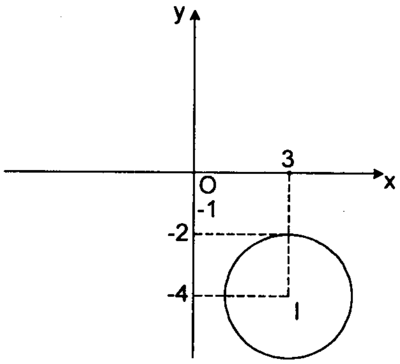
**<u>Giải</u>**

Giả sử Z = x + yi, khi đó: |Z – (3 – 4i)| = 2

$$\Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i| = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{9}\left[\frac{(1+3t)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{(1+3t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1\right]$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra các điểm M(x; y) biểu diễn số phức Z = x + yi nằm trên đường tròn tâm I(3; –4) bán kính R = 2.




*Chú ý:*

Ta có thể giải bài toán trên như sau:

Gọi M là điểm biểu diễn số phức Z, còn I(3; –4) là điểm biểu diễn số phức 3–4i. Khi đó ta có:

|Z – (3 – 4i)| = 2 $\Leftrightarrow$ MI = 2 (2)

Từ (2) suy ra M nằm trên đường tròn tâm I bán kính 2. Ta thu lại kết quả trên.

***Thí dụ 4***

Tìm số phức Z nếu $Z^2 + |Z| = 0$.

**<u>Giải</u>**

Đặt Z=x+yi $\Rightarrow$ |Z| = $\sqrt{x^2 + y^2}$ , khi đó $Z^2 + |Z| = 0$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)+\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 & (1)\\ 2xy=0 & (2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=0 \\ -y^2+|y|=0 \end{cases} & \begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2+|x|=0 \end{cases} & \begin{matrix}(5)\\(6)\end{matrix} \end{array}\right.$$

Giải hệ (3) (4) và (5) (6) (dễ dàng) ta đi đến hệ (1) (2) có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x=0; y=0 \\ x=0; y=-1 \\ x=0; y=1. \end{array}\right.$$

Vậy ba số phức cần tìm Z = 0; Z= i; và Z = –i.

***Thí dụ 5***

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z nếu như thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

1/ $|Z + 2| = |i - Z|$

2/ $|Z - 4i| + |Z + 4i| = 10$.

**Giải**

1/ Ta có $|Z + 2| = |i - Z| \Leftrightarrow |Z - (-2)| = |Z - i|$ (1)

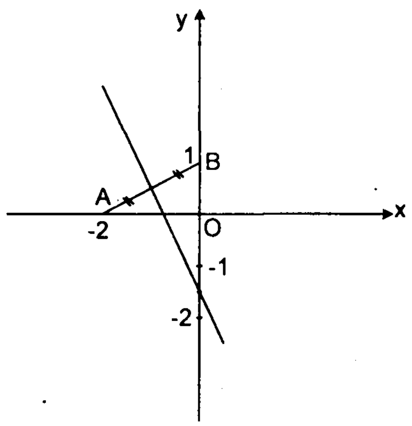
Gọi M là điểm biểu diễn số phức Z, A là điểm biểu diễn số –2 (tức là A = (–2;0), B là điểm biểu diễn số I (tức là B = (0;1).

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ MA = MB (2).

Từ (2) suy ra tập hợp những điểm M biểu diễn số phức Z nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

*Chú ý*: 1/ Ở đây ta đã sử dụng nhận xét sau: Nếu $M_1M_2$ tương ứng là hai điểm biểu diễn các số phức $Z_1$ và $Z_2$ thì:

$$|Z_1 - Z_2| = M_1M_2$$




+ Ta có thể giải cách khác như sau: Đặt Z = x + yi.

Ta có: $|Z + 2| = |i - z|$

$\Leftrightarrow |(x + 2) + yi| = |x + (y - 1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4 = x^2 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0$ (3)

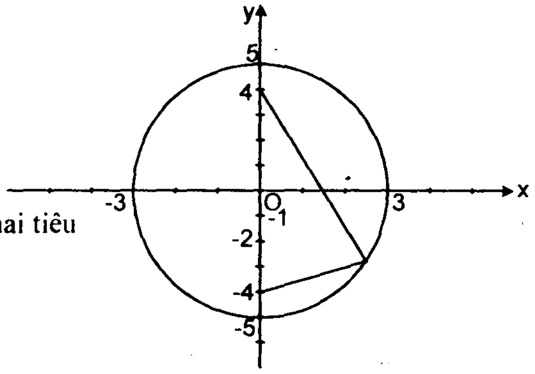
Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng (3). Các bạn có thể thấy (3) chính là trung trực của AB.

2/ Giả sử ta có: $|Z - 4i| + |Z + 4i| = 10$.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức Z, A = (0, –4) và B = (0; 4) tương ứng là các số phức –4i và 4i. Khi đó:

$$|Z-4i|+|Z+4i|=10$$

$$\Leftrightarrow MA+MB=10\ (*)$$




Từ (*) suy ra M nằm trên elip có hai tiêu điểm là A; B và trục lớn bằng 10.

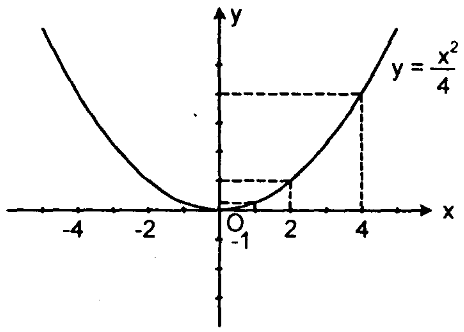
Phương trình của elip có dạng:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

***Thí dụ 6 :***

Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức Z thỏa mãn điều kiện sau:

$$2|Z-i|=|Z-\overline{Z}+2i|$$




<u>**Giải**</u>

Đặt Z = x + yi, thì

$$2|Z-i|=|Z-\overline{Z}+2i|$$

$$\Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=|2(y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1 \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{4}$$

Vậy tập hợp những điểm M là parabol $y=\frac{x^2}{4}$

*Nhận xét:*

Với các thí dụ 3, 4, 5 nên sử dụng biểu diễn hình học của số phức.

Còn trong thí dụ 6, thì sử dụng bằng phép tính về môđun.

***Thí dụ 7:***

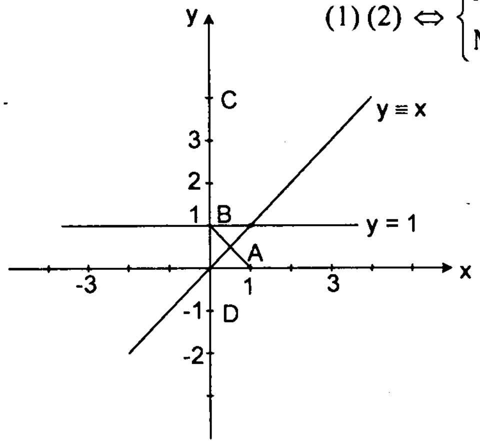
Tìm số phức thỏa mãn hệ: $\begin{cases}\left|\dfrac{Z-1}{Z-i}\right|=1\\ \left|\dfrac{Z-3i}{Z+i}\right|=1.\end{cases}$

<u>**Giải**</u>

Với hai số Z, Z' (Z' $\neq$ 0) thì $\left|\dfrac{Z}{Z'}\right|=\dfrac{|Z|}{|Z'|}$, do đó hệ đã cho tương ứng với:

$$\begin{cases}|Z-1|=|Z-i| & (1)\\ |Z-3i|=|Z-(-i)| & (2)\end{cases}$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức Z, A=(1;0), B = (0;1) tương ứng biểu diễn các số 1 và i; C (0;3) và D = (0; −1) tương ứng biểu diễn các số phức 3i và −i thì:




$$(1)\,(2) \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB & (3) \\ MC = MD. & (4) \end{cases}$$

Từ (3) (4) suy ra M là giao điểm của đường trung trực của AB và đường trung trực của CD.

Dễ thấy y = x và y = 1 tương ứng là hai đường trung trực của AB và CD.

Vậy Z = 1 + i là số phức cần tìm.

***Thí dụ 8***

Tìm số phức thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \left|\dfrac{Z-12}{Z-8i}\right| = \dfrac{5}{3} \\ \left|\dfrac{Z-4}{Z+8}\right| = 1. \end{cases}$$

**<u>Giải</u>**

Đặt Z= x+yi khi đó:

$$\left|\frac{Z-4}{Z+8}\right| = 1 \Leftrightarrow |x-4+yi| = |x-8+yi|$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x = 6\ (1)$$

$$\left|\frac{Z-12}{Z-8i}\right| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow |x-12+yi| = \frac{5}{3}|6+(y-8)i|$$

$$\Leftrightarrow |-6+yi| = \frac{5}{3}|6+(y-8)i| \ \text{(do } x = 6)$$

$$\Leftrightarrow 36 + y^2 = \frac{25}{9}\left[36 + (y-8)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 25y + 136 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 17 \\ y = 8. \end{array}\right.$$

Vậy có hai số phức cần tìm: Z = 6 + 8i và Z = 6 + 17i.

*Nhận xét:*

Hai thí dụ 7 và 8 cùng loại nhưng ta dùng hai phương pháp giải thích hợp khác nhau (phương pháp biểu diễn hình học của số phức với thí dụ 7, phương pháp tính toán môđun với thí dụ 8).

# §2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

**1. Tóm tắt lí thuyết**

Nếu $\varphi$ là một acgumen của số phức z thì mọi acgumen của nó có dạng

$$z = \varphi + k2\pi,\ k \in Z$$

Nếu r > 0 là môđun của số phức z, còn $\varphi$ là một acgumen của nó, thì

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là dạng lượng giác của số phức z.

Nếu $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $r_1 > 0$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $r_2 > 0$,

thì $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Công thức Moivre: Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, r > 0

thì $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

**2. Các dạng bài tập cơ bản**

**Loại 1:** Các bài toán xác định acgumen của số phức

Nhìn chung các loại bài tập này có cách giải chung như sau: Giả sử phải tìm một acgumen của số phức z. Ta cần biến đổi sao cho z có dạng:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \text{với } r > 0.$$

Khi đó $\varphi$ là một acgumen của z.

***Thí dụ 1***

Cho số phức $Z = 1 - \sin\varphi + i\cos\varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$

Tìm một acgumen của số phức Z.

<u>**Giải**</u>

Ta có: $Z = 1 - \sin\varphi + i\sin\varphi = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Do $0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) > 0.$

Vậy từ (1) suy ra $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ là một acgumen của Z.

*Thí dụ 2*

Cho số phức Z có môđun bằng 1 và $\varphi$ là một acgumen của nó.

1/ Tìm một acgumen của số phức $\frac{\overline{Z}}{Z}$.

2/ Tìm một acgumen của số phức $Z+\overline{Z}$ nếu $\cos\varphi \neq 0$.

**Giải**

Từ giả thiết suy ra: $Z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

1/ Ta có $\frac{\overline{Z}}{Z} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos(-2\varphi) + i\sin(-2\varphi)$.

Vậy $-2\varphi$ là một acgumen của số phức $Z_1 = \frac{\overline{Z}}{Z}$.

2/ Ta có $Z+\overline{Z} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$.

+ Nếu $\varphi>0$, khi đó $Z+\overline{Z} = 2\cos\varphi - 1 = 2\cos\varphi(\cos 0 + i\sin 0)$

Vậy lúc này 0 là một acgumen của số phức $Z_2 = Z+\overline{Z}$.

+ Nếu $\varphi<0$, khi đó $Z+\overline{Z} = (-2\cos\varphi)(-1) = (-2\cos\varphi)(\cos\pi + i\sin\pi)$

Do $-2\cos\varphi > 0$ nên $Z_2 = Z+\overline{Z}$ có một acgumen là $\pi$.

**Loại 2**: Các bài toán xác định số phức Z dựa vào điều kiện về acgumen:

*Thí dụ 1*

Xét các số phức Z thỏa mãn điều kiện

$$\left|2Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\right| = 1 \quad (1)$$

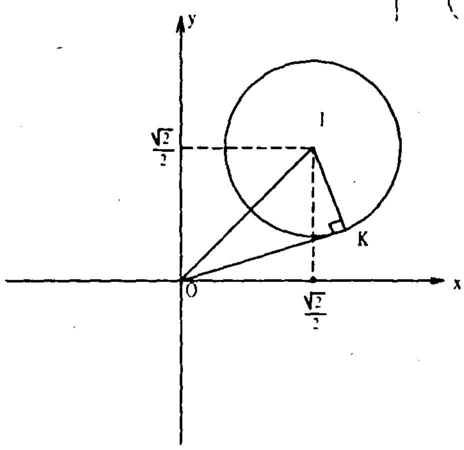
1/ Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức Z thỏa mãn điều kiện (1)

2/ Trong các số phức đã cho (tức là thỏa mãn điều kiện (1)), tìm số phức có acgumen dương và nhỏ nhất.

**Giải**

1/ Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left|Z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}. \ (2)$$




Gọi $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là điểm biểu diễn số phức $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}. \ (3)$$

Từ (3) suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn (1) là đường tròn tâm I bán kính $\frac{1}{2}$.

2/ Kẻ tiếp tuyến OK với đường tròn ở câu 1. Dễ thấy OI = 1, nên

$$\sin\widehat{IOK} = \frac{IK}{IO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{IOK} = \frac{\pi}{6}.$$

Ta có: $\widehat{KOx} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Vậy số phức $Z = OK\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

là số phức thỏa mãn (1) và có acgumen dương và nhỏ nhất.

***Thí dụ 2:***

Tìm số phức của Z sao cho $\left|\frac{Z-i}{Z+3i}\right| = 1$ và Z+1 có một acgumen bằng $-\frac{\pi}{6}$.

**Giải**

Từ $\left|\frac{Z-i}{Z+3i}\right| = 1 \Leftrightarrow |Z-i| = |Z+3i|$

$$\Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+3)i|, \qquad \text{(ở đây } Z = x + yi)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy Z = x–i

Ta có: Z + 1 = (x + 1) –i (1). Vì Z + 1 có một acgumen bằng $-\frac{\pi}{6}$ nên Z+1 có dạng:

$$Z+1 = r\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \text{ với } \tau > 0 = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3} - i\right) \text{ (2)}$$

Từ (1) (2) suy ra $\begin{cases} x+1 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \\ -1 = -\frac{\tau}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ x = 2\sqrt{3} - 1. \end{cases}$

Vậy Z = $2\sqrt{3} - 1$ –i là số phức cần tìm.

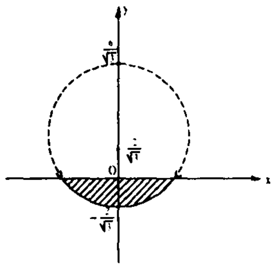
***Thí dụ 3:***

Xác định tập hợp các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức Z sao cho số phức $\frac{Z-2}{Z+2}$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{3}$.

**Giải**

Giả sử Z = x + yi, thì:

$$\frac{Z-2}{Z+2}=\frac{(x-2)+yi}{(x+2)+yi}=\frac{\left[(x-2)+yi\right]\left[(x+2)-yi\right]}{(x-2)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2}+\frac{4y}{(x-2)^2+y^2}i.$$



Do $\frac{Z-2}{Z+2}$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{3}$, nên ta có:

$$=\frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2}+\frac{4y}{(x-2)^2+y^2}i=\tau\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\tau>0.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2}=\dfrac{\tau}{2} & (1)\\[2ex] \dfrac{4y}{(x-2)^2+y^2}=\dfrac{\tau\sqrt{3}}{2}. & (2)\end{cases}$$

Từ (1) (2) dẫn đến y>0 (do $\tau>0$) và

$$\frac{4y}{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad (3)$$

Kết hợp (3) và y >0 suy ra tập hợp các điểm M cần tìm là phần đường tròn tâm tại điểm $I\left(0;\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ bán kính $\frac{4}{\sqrt{3}}$ nằm phía trên trục thực (trục Ox)

**Loại 3**: Dạng lượng giác của số phức:

Khi giải các bài tập cần lưu ý đến các điều sau đây:

- Dạng lượng giác của số phức có dạng: $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, với $r>0$.
- Thuộc các công thức nhân, chia và công thức Moivre đối với số phức dưới dạng lượng giác.

***Thí dụ 1:***

Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau:

1/ $Z_1=\dfrac{(1+i)^{12}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$ ;

2/ $Z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 i^3\left(1+\sqrt{3}i\right)^7$.

**<u>Giải</u>**

1/ Ta có:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Theo công thức Moivre ta có:

$$Z_1=\frac{(1+i)^{12}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{12}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)}{2^9\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2^3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Vậy phần thực của $Z_1$ là 0, phần ảo của nó là $-\frac{1}{8}$.

2/ Ta có: $\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

$$i^3-i=\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right);$$

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Từ đó theo công thức Moivre ta có:

$$Z_2=\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right].2^7\left[\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right].$$

Theo quy tắc nhân số phức dưới dạng lượng giác ta có:

$$Z_2=2^7\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

Vậy phần thực của $Z_2$ là $-2^6.\sqrt{3}=-64\sqrt{3}$, phần ảo của $Z_2$ là $-64$.

***Thí dụ 2***

Biết rằng số phức Z thỏa mãn $Z+\frac{1}{Z}=1$. Hãy tính $Z^{2010}+\frac{1}{Z^{2010}}$.

**<u>Giải</u>**

Từ

$$Z+\frac{1}{Z}=1\Leftrightarrow Z^2-Z+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}Z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\\ Z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).\end{array}\right.$$

a/Nếu $Z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow Z^{2010}=\cos\frac{2010\pi}{3}+i\sin\frac{2010}{3}$. (1)

Ta có: $\frac{1}{Z}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow\frac{1}{Z^{2010}}=\cos\left(-\frac{2010\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2010\pi}{3}\right).(2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $Z^{2010}+\frac{1}{Z^{2010}}=2\cos(670\pi)=2$.

b/ Nếu $Z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{Z} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow Z^{2010} + \frac{1}{Z^{2010}} = 2$.

Tóm lại ta luôn có : $Z^{2010} + \frac{1}{Z^{2010}} = 2$.

***Thí dụ 3***

Cho số phức $Z = \left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m$. Tìm m nguyên dương để Z là số thực; là số ảo.

**Giải**

Ta có: $\frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{25} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Theo công thức Moivre ta có: $Z = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} + i\sin\frac{m\pi}{4}\right)$ (1)

Từ (1) suy ra:

Z là số thực $\Leftrightarrow \sin\frac{m\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4} = k \Leftrightarrow m = 4k$; với k = 1, 2, ....

Z là số ảo $\Leftrightarrow \cos\frac{m\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow m = 4k + 2$, với k = 0, 1, 2....

# §3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Trong mục này sẽ xét việc giải phương trình trong đó ẩn số của mỗi phương trình là một số phức Z. Để giải được phương trình trên tập số phức cần nắm vững các kiến thức sau:

1/ Biết cách khai căn bậc hai của một số phức Z = a+bi.

2/ Biết cách giải phương trình bậc hai $ax^2+bx+c = 0$, trong đó các hệ số a, b, c nói chung là các số phức.

3/ Thành thạo cách giải phương trình và hệ phương trình hữu tỉ.

Cần nhớ rằng việc giải phương trình trên tập số phức về cơ bản giống như giải phương trình trên tập số thực, chỉ có cái khác là phép tính ở đây là các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và khai căn số phức.

***Các dạng bài tập cơ bản***

**Loại 1**: Giải phương trình bậc hai trên tập các số phức:

Phương pháp giải: Sử dụng công thức nghiệm như công thức nghiệm đối với phương trình bậc hai trên tập các số thực.

***Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2009)***

Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$\frac{4Z - 3 - 7i}{Z - i} = Z - 2i.$$

**Giải**

Với điều kiện $Z \neq i$, phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$4Z - 3 - 7i = (Z - i)(Z - 2i)$$
$$\Leftrightarrow Z^2 - (3i + 4)Z + 1 + 7i = 0 \ (1)$$

Ta có $\Delta = (3i + 4)^2 - 4(1 + 7i) = 3 - 4i$

Giả sử $Z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta$ khi đó ta có hệ sau để xác định x, y:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = -1 \\ x = -2; y = 1. \end{array}\right.$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{3i + 4 + (2 - 1)}{2} = 3 + i \\ Z_2 = \dfrac{3i + 4 - (2 - 1)}{2} = 1 + 2i. \end{array}\right.$

Vậy $Z_1$, $Z_2$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

***Thí dụ 2***

Giải phương trình trên tập số phức:

$$(1 - i)^2 - 2(1 + 2i)Z - 4 = 0.$$

**Giải**

Do $1 - i \neq 0$ nên ta có:

$$(1 - i)Z^2 - 2(1 + 2i)Z - 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2\frac{1 + 2i}{1 - i}Z - (1 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z^2 - (1 + 2i)(1 + i)Z - 2(1 + i) = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (1 - 3i)Z - 2(1 + i) = 0. \quad (1)$$

Ta có: $\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = 2i$

Gọi x+yi ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 2i ta có

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 1 \\ x = -1; y = -1. \end{array}\right.$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{3i - 1 + 1 + i}{2} = 2i \\ Z_2 = \dfrac{3i - 1 - 1 - i}{2} = -1 + i. \end{array}\right.$

***Thí dụ 3:***

Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$(2 - 3i)Z^2 + (4i - 3)Z + 1 - i = 0.$$

**Giải**

Ta có: $(2 - 3i) + (4i - 3) + 1 - i = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $Z_1 = 1$ và nghiệm

$$Z_2 = \frac{c}{a} = \frac{1 - i}{2 - 3i} = \frac{1}{13}(1 - i)(2 - 3i) = -\frac{1 + 5i}{13}.$$

*Nhận xét:*

- Các quy tắc nhẩm nghiệm và định lí Viet vẫn đúng trong trường hợp xét phương trình bậc hai trên tập số phức.

- Xét thí dụ sau: Xét phương trình bậc hai ở thí dụ 2

$$Z^2 + (1 - 3i)Z - 2(1 + i) = 0\ (*)$$

Ta có:

$$2i + (-1 + i) = 3i - 1$$

$$2i(-1 + i) = -2(1 + i).$$

Vậy theo định lý Vi-t suy ra: (*) có hai nghiệm $Z_1 = 2i$ và $Z_2 = -1 + i$.

Ta có cách khác giải thí dụ 2.

**Loại 2**: Phương trình quy về bậc hai và hệ phương trình:

***Thí dụ 1***: Giải phương trình với Z là số phức

$$\left(Z^2 + Z\right)^2 + 4\left(Z^2 + Z\right) - 12 = 0.$$

**<u>Giải</u>**

Đặt $t = Z^2 + Z$, ta có: $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -6 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} Z^2 + Z + 6 = 0 \\ Z^2 + Z - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{23}\, i}{2}; Z_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{23} i}{2} \\ Z_3 = 1; Z_4 = -2. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

***Thí dụ 2 :*** Giải phương trình với Z là số phức: $Z^4 - Z^3 + \dfrac{Z^2}{2} + Z + 1 = 0.$

**<u>Giải</u>**

Vì Z = 0 không phải là nghiệm của phương trình đã cho, nên ta có:

$$Z^2 - Z + \frac{1}{2} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(Z - \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z - \frac{1}{Z}\right) + \frac{5}{2} = 0. \ (1)$$

Đặt $t = \left(Z - \dfrac{1}{Z}\right)$, thì (1) có dạng:

$$t^2 - t + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1 + 3i}{2} \\ t = \dfrac{1 - 3i}{2}. \end{array}\right.$$

+ Nếu $t = \dfrac{1 + 3i}{2}$, ta có: $Z - \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1 + 3i}{2} \Leftrightarrow 2Z^2 - (1 + 3i)Z - 2 = 0$ (2)

Vì $\Delta = 8 + 6i$, có căn bậc hai là $3 + i$ và $-3 - i$, nên

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{1 + 3i + 3 + i}{4} = 1 + i \\ Z_2 = \dfrac{1 + 3i - 3 - i}{4} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i. \end{array}\right.$$

+ Nếu $t = \frac{1-3i}{2}$, ta có $2Z^2 - (1-3i)Z - 2 = 0$

Giải như trên ta có: $Z_3 = 1 - i$; $Z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm kể trên

***Thí dụ 3*** : Giải hệ phương trình hai ẩn $Z_1$ ; $Z_2$ sau trên tập các số phức :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 4 + i \\ Z_1^2 + Z_2^2 = 5 - 2i. \end{cases}$$

<u>**Giải**</u>

Ta có:

$$Z_1Z_2 = \frac{(Z_1 + Z_2)^2 - (Z_1^2 + Z_2^2)}{2} = \frac{(4-i)(5-2i)}{2} = 5 + 5i.$$

Vậy đưa hệ đã cho về dạng tương đương:

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 4 + i & (1) \\ Z_1Z_2 = 5 + 5i. & (2) \end{cases}$$

Theo định lí Viet, $Z_1$ và $Z_2$ là các nghiệm của phương trình sau (xét trên tập số phức)

$$t^2 - (4 + i)t + 5 + 5i = 0 \ (3)$$

Giải như các thí dụ 1, 2 ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3 - i \\ t_2 = 1 + 2i. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm như sau:

$$\left[\begin{array}{l} Z_1 = 3 - i;\ Z_2 = 1 + 2i \\ Z_1 = 1 + 2i;\ Z_2 = 3 - i. \end{array}\right.$$

***Thí dụ 4***

Giải hệ phương trình hai ẩn Z, W trên tập số phức:

$$\begin{cases} Z + W = 3(1+i) \\ Z^3 + W^3 = 9(-1+i). \end{cases}$$

<u>**Giải**</u>

Ta có:

$$Z^3 + W^3 = (Z+W)^3 - 3ZW(Z+W) \Rightarrow 9(-1+i) = 27(1+i)^3 - 3ZW.3(1+i)$$

$$\Rightarrow ZW(1+i) = 3(1+i)^3 - (-1+i) = -5 + 5i \Rightarrow ZW = 5i.$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau: $\begin{cases} Z + W = 3(1+i) \\ ZW = 5i. \end{cases}$

Theo định lí Viet thì Z,W là các nghiệm của phương trình bậc hai sau (xét trên tập số phức)

$$t^2 - 3(1 + i)t + 5i = 0 \ (3).$$

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2+i \\ t_2 = 1+2i \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} Z = 2+i; W = 1+2i \\ Z = 1+2i; W = 2+i. \end{array}\right.$$

## *BÀI TẬP TỰ GIẢI*

***Bài 1:***

Tìm số phức Z nếu (2 + 3i)Z = Z – 1.

*Đáp số*: $Z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.

***Bài 2***

Giả sử M là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức Z. Tìm tập hợp hững điểm M thỏa mãn một trong những điều kiện sau:

1/ $|Z - 1 + i| = 2$.

2/ $|2 + Z| > |Z - 2|$.

3/ $1 \le |Z + 1 - i| \le 2$.

*Đáp số:*

1/ Đường tròn tâm I (1; –1) bán kính R = 2

2/ Tập hợp các điểm M (x, y) mà x > 0

3/ Hình vành khăn tâm tại I(–1; 1) và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2 và 1.

***Bài 3:***

Xác định tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức Z thỏa mãn một trong các iện sau:

1/ $|Z + \overline{Z} + 3| = 4$

2/ $|Z^2 - (\overline{Z})^2| = 4$.

*o số:* 1/ $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$.

2/ $\left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -1. \end{array}\right.$

*':*

ịnh tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức Z ệ thức:

$$\left|\frac{Z}{Z - i}\right| = 3.$$

Đường tròn tâm $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$ bán kính $R = \frac{3}{8}$.

***Bài 5:***

Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức Z sao cho:

$$\frac{Z+i}{\overline{Z}+i} \text{ là số thực.}$$

*Đáp số:* Gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm A(0;1).

***Bài 6***

Cho số phức Z có môđun bằng 1 và $\varphi$ là một acgumen của nó. Hãy tìm một acgumen của các số phức sau:

1/ $-\frac{1}{2\overline{Z}}$

2/ $Z^2 - Z$, nếu $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$

3/ $Z^2 + \overline{Z}$, nếu $\cos\frac{3\varphi}{2} \neq 0$.

*Đáp số:*

1/ $\pi + 4$

2/ $\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$, nếu $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$;

$\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}$, nếu $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$.

3/ $\frac{\varphi}{2}$, nếu $\cos\frac{3\pi}{2} > 0$;

$\frac{\varphi}{2} + \pi$, nếu $\cos\frac{3\pi}{2} < 0$.

***Bài 7:***

Giải phương trình $Z^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)Z + \cos\varphi\sin\varphi i = 0$.

*Đáp số:* $Z_1 = \cos\varphi$; $Z_2 = i\sin\varphi$.

***Bài 8:***

Giải phương trình $(Z^2 + 3Z + 6)^2 + 2Z(Z^2 + 3Z + 6) - 3Z^2 = 0$.

*Đáp số:* $Z_1 = -3 + \sqrt{3}$; $Z_2 = -3 - \sqrt{3}$; $Z_3 = -1 + \sqrt{5}i$; $Z_4 = -1 - \sqrt{5}i$.

***Bài 9:***

Giải phương trình:

$$Z^4 - 4Z^3 + 7Z^2 - 16Z + 12 = 0$$

*Hướng dẫn:* Đưa về dạng $(Z-1)(Z-3)(Z^2+4) = 0$.

*Đáp số:* $Z_1 = 1$; $Z_2 = 3$; $Z_3 = 2i$; $Z_4 = -2i$.

***Bài 10:***

Giải hệ phương trình $\begin{cases} Z - W = i \\ iZ - W = 1 \end{cases}$

*Đáp số:* $Z = -1$, $W = -1 - i$.