

Bài giảng số 17

HÀM SỐ PHÂN THỨC

Cấu trúc của bài giảng này tương tự như cấu trúc của bài giảng số 16 (hàm số đa thức).

§1. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN VỚI HÀM SỐ PHÂN THỨC

Kiến thức cơ bản xin xem trong tiết 1 – bài giảng số 16. Sau đây xét các dạng toán cơ bản

Loại 1: Tiếp tuyến tại một điểm cho trước trên đường cong.

Phương pháp giải như đã trình bày trong loại 1, §1 bài giảng 16.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

Cho đường cong $y = \frac{2x}{x+1}$ (C).

Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$, ở đây O là gốc tọa độ.

Giải

Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0}{x_0+1}\right) \in (C)$ là điểm cần tìm. Ta có $y'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2}$.

Do đó phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$y - \frac{2x_0}{x_0+1} = \frac{2}{(x_0+1)}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (1).$$

Từ (1) suy ra $A = (-x_0^2; 0)$ và $B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

$$\text{Ta có: } S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}|-x_0^2| \left| \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \right| = \frac{x_0^4}{(x_0+1)^2} \quad (2).$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } S_{OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0^4}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{4} \quad (3).$$

Giải (3) ta được $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Như vậy $M_1(1; 1)$ và $M_2(-\frac{1}{2}; -2)$ là hai điểm cần tìm trên (C).

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)

Cho đường cong $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Giải

Dễ thấy $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của (C) (bạn đọc tự nghiệm lại).

Khi đó tiếp tuyến (d) cần tìm do vuông góc với tiệm cận xiên nên có hệ số góc bằng -1 . Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, ta có:

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 3}{(x_0 + 2)^2} = -1 \quad (1).$$

Dễ dàng giải (1) và ta có: $x_0 = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng công thức $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ ta suy ra có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x + 2\sqrt{2} - 5$ và $y = -x - 2\sqrt{2} - 5$.

Thí dụ 3:

Cho đường cong $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ (C).

Tìm điểm $M \in (C)$ để tiếp tuyến cắt Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho OAB là tam giác vuông cân.

Giải

Gọi $M \in (C)$ là điểm cần tìm.

Dễ thấy tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$$y - \frac{x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 2}{(x_0 - 1)^2} (x - x_0) \quad (1).$$

Bằng cách lần lượt cho $y = 0$ (cho $x = 0$) trong (1), ta dễ dàng suy ra:

$$A = \left(\frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{-x_0^2 + 2x_0 + 2}; 0 \right); B = \left(0; \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} \right)$$

Tam giác OAB vuông cân khi và chỉ khi:

$$OA = OB > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{-x_0^2 + 2x_0 + 2} \right| = \left| \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} \right| > 0 \quad (2)$$

Giải (2) và thu được $x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$.

Vậy trên (C) có hai điểm cần tìm là M_1, M_2 với hoành độ tương ứng là

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}.$$

Thí dụ 4: Cho đường cong $y = \frac{2x+1}{x+2}$ (C).

Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: y = 2x + 1$ một góc 45° .

Giải

Gọi a_{tt} là hệ số góc của tiếp tuyến. Vì tiếp tuyến tạo với d một góc 45° và do d có hệ số góc bằng 2, nên ta có:

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{a_{tt} - 2}{1 + 2a_{tt}} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_{tt} - 2}{1 + 2a_{tt}} = 1 \\ \frac{a_{tt} - 2}{1 + 2a_{tt}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{tt} = -3 \\ a_{tt} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm, ta có $a_{tt} = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0 + 2)^2} > 0$.

Ta có $a_{tt} = -3$ bị loại, còn $a_{tt} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 + 2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -5 \end{cases}$

Từ đó áp dụng công thức $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ suy ra có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ và $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

Chú ý: Ta đã sử dụng công thức quen biết sau: d_1, d_2 là hai đường thẳng có hệ số góc lần lượt là k_1, k_2 . Khi đó nếu gọi α là góc giữa d_1 và d_2 thì

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

(đĩ nhiên không xét khi $d_1 \perp d_2$).

Thí dụ 5: Cho đường cong $y = \frac{3x+1}{x-3}$ (C) và M là một điểm bất kì trên (C).

Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B.

1/ Chứng minh M là trung điểm của AB.

2/ Chứng minh tiếp tuyến tại M không đi qua I.

Giải

Giả sử $M \in (C)$ và có hoành độ x_0 . Áp dụng công thức viết phương trình tiếp tuyến ta có phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M là:

$$y = \frac{-1}{(x_0 - 3)^2} (x - x_0) + \frac{3x_0 + 1}{x_0 - 3} \quad (1)$$

1/ Rõ ràng $x = 3$ và $y = 3$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C). Gọi A, B tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến (1) với tiệm cận đứng và tiệm cận

ngang. Khi đó dễ thấy $A = \left(3; 3 + \frac{2}{x_0 - 3} \right)$; $B = (2x_0 - 3; 3)$

Từ đó: $x_A + x_B = 2x_0 = 2x_M$. Mặt khác A, M, B thẳng hàng, nên M là trung điểm của AB.

2/ Để thấy I(3; 3). Thay $x=3$ vào vế phải của (1) ta có

$$VP = \frac{-(3-x_0)}{(x_0-3)^2} + \frac{3x_0+1}{x_0-3} = \frac{3x_0+2}{x_0-3} \neq 3 \text{ với } \forall x_0 \neq 3.$$

Điều đó chứng tỏ rằng I không nằm trên tiếp tuyến (1) $\Rightarrow$ đpcm.

Loại 2: Tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước trên đường cong:

Phương pháp giải như phương pháp sử dụng đối với loại 2, §1, bài giảng 16.

Thí dụ 1:

Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$ và điểm A(6; 4). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến đi qua A.

Giải

Tiếp tuyến với C đi qua A có dạng: $y = k(x - 6) + 4$ (vì $x = 6$ không thể là tiếp tuyến của (C)). Ta có: $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1}{x_0 - 2} = k(x_0 - 6) + 4 & (1) \\ \frac{x_0^2 - 4x_0 + 3}{(x_0 - 2)^2} = k. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn (để ý rằng cần có điều kiện $x_0 \neq 2$), ta đi đến:

$$2x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = 3.$$

+ Khi $x_0 = 0$, thì $k = \frac{3}{4}$. Tiếp tuyến là $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

+ Khi $x_0 = 3 \Rightarrow k = 0$. Tiếp tuyến là $y = 4$.

Thí dụ 2:

Cho $y = \frac{x+3}{x-1}$ (C). Tìm các điểm M trên đường thẳng $y = 2x+1$, sao cho từ M vẽ được một tiếp tuyến đến (C).

Giải

Gọi $M(\alpha; 2\alpha+1)$ là điểm cần tìm. Đường thẳng đi qua M và là tiếp tuyến của (C) có dạng: $y = k(x - \alpha) + 2\alpha + 1$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1} = k(x_0 - \alpha) + 2\alpha + 1 & (1) \\ \frac{-4}{(x_0 - 1)^2} = k. & (2) \end{cases}$$

Với điều kiện $x_0 \neq 1$, thay (2) vào (1) rồi rút gọn, ta có:

$$\alpha x_0^2 - 2x_0(\alpha + 2) + 3\alpha + 2 = 0 \quad (3)$$

Bài toán trở thành tìm α để (3) có đúng một nghiệm khác 1.

– Nếu $\alpha = 0$, thì (3) có dạng $-4x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

– Nếu $\alpha \neq 0$, thì (3) có duy nhất nghiệm và nghiệm này khác 1 khi:

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ \frac{\alpha + 2}{\alpha} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \\ \alpha + 2 \neq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Nếu $\alpha \neq 0$ thì (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1 khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_0 = 1 \text{ là một nghiệm của} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2 + \alpha + 2 > 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Tóm lại $M_1(0;1)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(1;3)$, $M_4(2;5)$ là bốn điểm cần tìm.

Thí dụ 3:

Cho đường cong $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ (C). Tìm trên trục Oy các điểm có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải

Giả sử $M(0;\alpha)$ là điểm cần tìm. Tiếp tuyến với (C) kẻ từ M có dạng: $y = kx + \alpha$ (1)
Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{2x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = kx_0 + \alpha & (1) \\ \frac{2x_0^2 + 4x_0}{(x_0 + 1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) (với điều kiện $x_0 \neq -1$) rồi rút gọn, ta có

$$(\alpha + 1)x_0^2 + 2(\alpha - 1)x_0 + \alpha - 1 = 0 \quad (3).$$

Bài toán trở thành: Tìm α để (3) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \neq -1$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2t_1^2 + 4t_1}{(t_1 + 1)^2} \cdot \frac{2t_2^2 + 4t_2}{(t_2 + 1)^2} = -1 \quad (4).$$

$$\text{Ta có (4)} \Leftrightarrow \frac{4(t_1 t_2)^2 + 8t_1 t_2(t_1 + t_2) + 16t_1 t_2}{[t_1 t_2 + (t_1 + t_2) + 1]^2} = -1 \quad (5).$$

Thay $t_1 + t_2 = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha+1}$; $t_1 t_2 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ vào (5) rồi rút gọn ta có:

$$\alpha^2 + 6\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3 \pm \sqrt{15} \quad (6)$$

(Chú ý rằng khi thỏa mãn (6) thì $\alpha + 1 \neq 0$, và $\Delta' = -2(\alpha - 1) > 0$)

Vậy trên đoạn Oy có hai điểm cần tìm $M_1(0; -3 + \sqrt{15})$ và $M_2(0; -3 - \sqrt{15})$.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM PHÂN THỨC

Với lớp hàm phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ta luôn sử dụng hai kết quả sau:

1/ Với lớp hàm $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($a \neq 0, a' \neq 0$) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ

khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{b'}{a'}$.

2/ Giả sử $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có cực trị tại $x = x_0$ khi đó ta có: $y(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)}$.

Xét các thí dụ sau:

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ (C_m). Tìm m để hàm số có cực

đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ O tạo thành tam giác vuông tại O .

Giải

Đường cong (C_m) có cực trị khi và chỉ khi phương trình

$y' = \frac{x^2 + 4x - m^2 + 4}{(x+2)^2} = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2 . Điều này xảy

ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4 - 8 - m^2 + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$ (2).

Khi thỏa mãn (2), (C_m) có cực trị tại hai điểm $A(-2-m; -2)$; $B(-2+m; 4m-2)$.

Vì thế OAB là tam giác vuông khi:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2+m)^2 + 4 + (m-2)^2 + (4m-2)^2 = (2m)^2 + (4m)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6} \quad (3).$$

Rõ ràng (3) thỏa mãn (2), nên là các giá trị cần tìm của m .

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$. Chứng minh rằng

với m bất kì, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Giải

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$m-3$	$-\infty$	$+\infty$	$m+1$	$+\infty$

Vậy với mọi m , (C_m) luôn có cực đại $A(-2; m-3)$ và cực tiểu tại $B(0; m+1)$.

Ta có $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \Rightarrow đpcm$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)

Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$. Tìm m để hàm số có cực trị và khoảng

cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{mx^2 - 1}{x^2} = 0$.

Vậy (C_m) có cực trị khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là khi và chỉ khi $m > 0$.

Lúc đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{m}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{m}}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$
			$-\infty$		$+\infty$

Như thế $m > 0$, hàm số có cực tiểu tại điểm $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$.

Để thấy $\Delta: y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$ là tiệm cận xiên của (C_m) . Từ đó:

$$d(A, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\left|m \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Rõ ràng $m = 1$ thỏa mãn điều kiện $m > 0$ nên là giá trị cần tìm của m .

Thí dụ 4:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1-x}$ (C_m). Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa chúng bằng 10.

Giải

Ta có $y' = \frac{-x^2 + 3x + m}{(1-x)^2}$. Lập luận như các thí dụ trên ta thấy (C_m) có cực trị

khi và chỉ khi $m > -1$

(1).

Khi thỏa mãn (1) thì (C_m) đạt cực trị tại x_1, x_2 , ở đây x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình: $-x^2 + 2x + m = 0$

(2)

Áp dụng công thức tính giá trị cực đại và cực tiểu với hàm phân thức, ta có:

$$y_1 = y(x_1) = 2x_1 + m; y_2 = y(x_2) = 2x_2 + m.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} AB = 10 &\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20 \end{aligned} \quad (3).$$

Áp dụng định lí Viet ta có $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = -m$

Thay vào (3) ta được $4m + 4 = 20 \Leftrightarrow m = 4$. (4).

Rõ ràng (4) thỏa mãn (1), nên $m = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm của m .

Thí dụ 5:

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$ (C_m) . Tìm m để (C_m) có cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía của trục Ox.

Giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 - 2mx - (m^2 + 1)}{(x - m)^2}.$$

Làm như các thí dụ trên, suy ra (C_m) có cực đại, cực tiểu với mọi m .

Khi đó (C_m) đạt cực trị tại x_1, x_2 , trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của

$$x^2 - 2mx - (m^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

Cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía của trục Ox, nếu như:

$$\begin{aligned} y(x_1) \cdot y(x_2) &> 0 \Leftrightarrow [2x_1 + (m+1)][2x_2 + (m+1)] > 0 \\ &\Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2 > 0 \end{aligned} \quad (2).$$

Áp dụng định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = -m^2 - 1$.

$$\text{Thay vào (2) và có } m^2 + 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Nhận xét:

1/ Nếu đòi hỏi cực đại, cực tiểu nằm về hai phía của trục tung thì điều kiện là $x_1 < 0 < x_2$.

2/ Trong các thí dụ 3, 4, việc tính giá trị cực đại cực tiểu $y(x_1), y(x_2)$ là khó khăn (không như các thí dụ 1, 2) vì thế ta áp dụng công thức

$$y(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)} \text{ đã trình bày ở phần mở đầu.}$$

Thí dụ 6:

Tìm m để đường cong $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ (C_m) có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho $|y(x_2) - y(x_1)| > 16$.

Giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 - 4mx + 2m}{(x - m)^2}.$$

Dễ thấy (C_m) có cực trị tại x_1, x_2 khi $m < 0$ hoặc $m > 1$ (1).

Khi đó (C_m) đạt cực trị tại x_1, x_2 , ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2mx + m = 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |y(x_1) - y(x_2)| > 16 &\Leftrightarrow |4x_1 - 3 - 4x_2 + 3| > 16 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 4 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 16 \end{aligned} \quad (3)$$

Áp dụng định lí Viet với (2), ta có $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = m$.

$$\text{Thay vào (3) và có } m^2 - m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 - \sqrt{17} \\ m > 1 + \sqrt{17}. \end{cases} \quad (4)$$

Rõ ràng (4) thỏa mãn (1), nên là các giá trị cần tìm của m .

§3. BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM PHÂN THỨC

Phương pháp giải như phương pháp đã sử dụng trong tiết §3 – bài giảng 16.

Xét các thí dụ sau:

Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)

Cho đường cong $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$ (C_m). Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt (C)

tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$.

Giải

Trước hết tìm điều kiện để $y = m$ và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Điều này xảy ra khi phương trình

$$\frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)} = m \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \neq 1. \text{ Ta thấy}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + (2m - 3)x + 3 - 2m = 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Vậy để $y = m$ và (C_m) cắt nhau tại hai điểm phân biệt ta cần có

$$\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4m - 3 > 0 \\ f(1) = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Khi thỏa mãn (2), $y = m$ và (C_m) cắt nhau tại A, B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2 , ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 + (2m - 3)x + 3 - 2m = 0. \quad (3)$$

Vì A, B nằm trên đường thẳng $y = m$, nên

$$AB = 1 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 1 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

Để thấy (4) thỏa mãn (2), nên là các giá trị cần tìm của m .

Chú ý: Ta có bài toán hoàn toàn tương tự (**Đề thi Đại học khối B-2009**)

Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ và đường cong $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$.

Giải hoàn toàn tương tự. Đáp số $m = \pm 2\sqrt{6}$.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A-2003)

Cho đường cong $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Giải

(C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình:

$$\frac{mx^2 + x + m}{x - 1} = 0$$

có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 > 0 \\ P = 1 > 0 \\ S = \frac{-1}{m} > 0 \\ 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0.$$

Chú ý: Bài toán tương tự (**Đề thi tuyển sinh đại học khối D-2003**) có dạng sau.

Tìm m để đường thẳng $y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt.

Với lời giải hoàn toàn tương tự, ta có đáp số: $m > 1$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D-2009)

Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đường cong $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của AB nằm trên trục tung.

Giải

Đường cong (C_m) và đường thẳng đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B điều kiện cần và đủ là phương trình: $-2x + m = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ (1)

phải có hai nghiệm phân biệt. Do khi $x = 0$, thì $x^2 + x + 1 \neq 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow x(-2x + m) = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 + (1 - m)x - 1 = 0 \quad (2)$$

Vì $\frac{c}{a} = \frac{-1}{3} < 0$, nên với mọi m thì (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Để trung điểm I của A, B nằm trên trục tung cần có $x_I = 0$. Ta có:

$$x_I = 0 \Leftrightarrow \frac{x_A + x_B}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{m - 1}{6} \Leftrightarrow m = 1.$$

Thí dụ 4:

Cho đường cong $y = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$ (C) và đường thẳng $d_m: y = 2mx - m$. Tìm m để (C) và (d_m) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (C).

Giải

Ta nhận thấy $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C) và (C) gồm hai nhánh, mỗi nhánh nằm về một phía của đường thẳng $x = 2$.

Vì thế (C) và (d_m) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (C) khi và chỉ khi phương trình

$$\frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = 2mx - m \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$.

Vì $x = 2$ không phải là nghiệm của $2x^2 - 3x$, nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = (x - 2)(2mx - m) \\ &\Leftrightarrow 2(m - 1)x^2 + (3 - 5m)x + 2m = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Bài toán trở thành: Tìm m để (2) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta = 17m^2 - 22m + 9 > 0 \\ (x_2 - 2)(x_1 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 22m + 9 > 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{m}{m-1} - \frac{5m-3}{m-1} + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy $m > 1$ là các giá trị cần tìm của tham số m.

Thí dụ 5:

Tìm m để cho đường thẳng $d_m: 2x + m$ cắt đồ thị (C) $y = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $2x + m = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 3x^2 + (m-6)x - m = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Do $\Delta = m^2 + 36 > 0$ và VT (3) $\neq 0$ khi $x = 1 \quad \forall m$, nên với mọi m, d_m và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt:

$$A(x_1; 2x_1 + m) \text{ và } B(x_2; 2x_2 + m).$$

$$\text{Ta có } AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2 = 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = \frac{5}{9}(36 + m^2). \quad (4)$$

Từ (4) suy ra AB nhỏ nhất khi $m = 0$.

§4. BÀI TOÁN TIỆM CẬN VỚI HÀM PHÂN THỨC

Trong mục này cần lưu ý hai điều sau đây:

1/ Nếu hàm phân thức không có tham số thì việc xác định các đường tiệm cận của các hàm số này là đơn giản, vì ta đã biết rõ quy tắc cách xác định các đường tiệm cận của nó (xem sách giáo khoa Giải tích 12).

2/ Nếu hàm phân thức có tham số, thí dụ:

$$y = \frac{2x-2}{x-m} \text{ hay } y = \frac{mx^2+2x-1}{x-2},$$

thì trước hết phải xem chúng có thỏa mãn điều kiện từ số và mẫu số có phải là không có nhân tử chung hay không. Rồi sau đó mới xem đến ứng với các giá trị đó thì phân thức có dạng gì, từ đó xác định đường tiệm cận của chúng theo các quy tắc đã học.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)

Cho đường cong $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$.

Tìm m để góc giữa hai đường tiệm cận bằng 45° .

Giải

Viết lại (C) dưới dạng: $y = mx - 2 + \frac{6m-2}{x+3m}$ (1)

Từ (1) suy ra cần xét các khả năng sau:

– Nếu $m = \frac{1}{3}$ khi đó từ (1) có $y = \frac{1}{3}x - 2$ với $x \neq -1$. Trường hợp này (C) không có tiệm cận.

2/ $m \neq \frac{1}{3}$ khi đó từ (1) suy ra:

+ (C) có tiệm cận đứng $x = -3m$

+ (C) có tiệm cận xiên $y = mx - 2$ (khi $m = 0$, thì có tiệm cận ngang $y = -2$)

Đoạn thẳng $x = -3m$ vuông góc với trục hoành, nên $y = mx - 2$ tạo với tiệm cận đứng một góc 45° khi và chỉ khi nó tạo với chiều dương của trục hoành một

góc bằng 45° hoặc 135° , tức là khi $\begin{cases} m = \tan 45^\circ \\ m = \tan 135^\circ \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Thí dụ 2:

Cho đường cong $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ (C_m). Tìm các tiệm cận của (C_m) khi m thay đổi.

Giải

Viết lại (C_m) dưới dạng: $y = 2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m}$ (1).

Ta có $2m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$. Vì thế từ (1) suy ra:

1/ Nếu $m = 0$, thì $y = 2x - 3$ với $x \neq 0$ (C_0) không có tiệm cận.

2/ Nếu $m = 1$, thì $y = 2x - 1$, với $x \neq 1$ (C_1) không có tiệm cận.

3/ Nếu $m \neq 0, m \neq 1$, thì (C_m) có tiệm cận đứng $x = m$ và tiệm cận xiên $y = 2x + 2m - 3$.

Thí dụ 3:

Cho $y = \frac{2x^2 + mx - 2}{x - 1}$ (C_m). Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với hệ trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Giải

Ta có: (C_m): $y = 2x + m + 2 + \frac{m}{x - 1}$ (1).

Vậy từ (1) suy ra (C_m) có tiệm cận xiên $y = 2x + m + 2$ khi $m \neq 0$. Tiệm cận xiên này cắt trục hoành tại $A\left(\frac{-m-2}{2}; 0\right)$ và trục tung tại $(0; m+2)$. Vì thế:

$$S_{OAB} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{|-m-2|}{2} \cdot |m+2| = 4 \Leftrightarrow |m+2| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6. \end{cases}$$

Thí dụ 4:

Cho đường cong $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ (C). Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

Giải

Dễ thấy $x = 1$ và $y = x + 3$ tương ứng là tiệm cận đứng và tiệm cận xiên, do đó $I(1; 4)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Điểm $M\left(x; x + 3 + \frac{1}{x - 1}\right) \in (C)$ nên

$$MI = \sqrt{(x - 1)^2 + \left(x - 1 + \frac{1}{x - 1}\right)^2} = \sqrt{2t^2 + \frac{1}{t^2} + 2}, \text{ với } t = x - 1$$

Từ đó ta có $MI \geq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$.

Vậy MI nhận giá trị nhỏ nhất $= \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2t^2 = \frac{1}{t^2}$.

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Vì thế trên (C) có hai điểm cần tìm với hoành độ $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Cho $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ (C). Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng qua M và tâm đối xứng của (C).

Đáp số: $M_1, M_2 \in (C)$ với hoành độ tương ứng $x_1 = 1 + \sqrt[4]{8}$ và $x_2 = 1 - \sqrt[4]{8}$.

Bài 2:

Cho đường cong $y = \frac{-4x + 3}{2x - 1}$ (C) và điểm $A(0; 1)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đi qua A.

Đáp số: $y = -2x + 1$ và $y = -18x + 1$.

Bài 3: Cho $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ (C).

1/ Chứng minh rằng $y = 7$ là một tiếp tuyến của (C).

2/ Chứng minh rằng trên đường thẳng $y = 7$ có bốn điểm sao cho từ mỗi điểm trên đó, có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến lập với nhau góc 45° .

Bài 4:

Cho $\frac{x^2 + x + m}{x + 1}$ (C_m). Tìm m để hàm số có hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Oy.

Đáp số: $m > 1$.

Bài 5:

Cho $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ (C_m). Tìm m để (C_m) có cực trị và khoảng cách từ hai điểm cực trị đến đường thẳng $x + y + 2 = 0$ là bằng nhau.

Đáp số: $m = \frac{1}{2}$.

Bài 6:

Tìm m để đường thẳng (d_m): $y = mx + 2 - m$ cắt đồ thị (C): $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$ tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của (C).

Đáp số: $m < \frac{3}{2}$ và $m \neq 1$.

Bài 7:

Cho $y = \frac{mx^2 + 2mx - 1}{x - 2}$ (C_m). Tìm m để (C_m) có tiệm cận xiên và khoảng cách từ $A(-4; \sqrt{|m|})$ đến nó là lớn nhất.

Đáp số: $m = \pm 1$.