

Bài giảng số 16

HÀM SỐ ĐA THỨC

Hàm số là một trong những nội dung chủ yếu của môn Toán được giảng dạy trong nhà trường phổ thông, chủ đề hàm số luôn luôn là câu số 1 trong mọi đề thi về môn Toán vào các trường Đại học và Cao đẳng.

Hàm số đa thức và hàm số phân thức là hai cấu thành chính của chuyên mục hàm số. Bài giảng này đề cập đến các bài toán liên quan đến hàm số đa thức, trong bài giảng số 17 sẽ trình bày các bài toán tương tự nhưng đối với lớp hàm số phân thức.

§1. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN VỚI HÀM ĐA THỨC

Các kiến thức cơ bản sau đây luôn luôn được sử dụng đến trong quá trình giải toán.

Cho đường cong $y = f(x)$ và điểm M nằm trên đường cong có hoành độ là x_0 . Gọi a_{tt} là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại M . Khi đó ta có:

$$1/ a_{tt} = y'(x_0) = f'(x_0).$$

2/ Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại M là $y - y_0 = y'(x_0).(x - x_0)$ (1)

Chú ý rằng (1) là phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm M cho trước trên đường cong, còn các trường hợp khác để giải các bài toán về tiếp tuyến người ta sử dụng kết quả sau:

Cho hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai đường tiếp xúc với nhau tại điểm M có hoành độ x_0 nếu như hệ sau đây thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

Loại 1: Tiếp tuyến với đường cong tại một điểm cho trước trên đường cong.

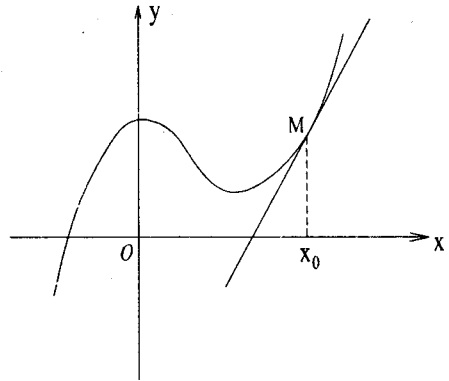
Để giải các bài toán loại này nhất thiết phải tìm được tiếp điểm của tiếp tuyến với đường cong, sau đó sẽ sử dụng công thức (1) nói trong phần mở đầu.

Xét các thí dụ sau:

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)

Cho đường cong: $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (C).

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho OAB là tam giác vuông cân tại O, ở đây O là gốc tọa độ.



Giải

Ta có: $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$. Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác

vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là ± 1 .

$$\text{Khi đó } a_{tt} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1. \end{cases}$$

Khi $x_0 = -2$, thì $y_0 = -4$, lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x - 2$.

Khi $x_0 = -1$, thì $y_0 = 1$, lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x$ (trường hợp này loại vì $y = -x$ đi qua gốc tọa độ, nên không tạo thành tam giác OAB).

Vậy có duy nhất $y = -x - 2$ là tiếp tuyến cần tìm.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn và chứng minh Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Giải

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$ và $y'' = 2x - 4$. Từ đó suy ra $M\left(2; \frac{2}{3}\right)$ là điểm uốn của

(C). Tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $y - \frac{2}{3} = -(x - 2) \Rightarrow y = -x + \frac{8}{3}$.

Tiếp tuyến này có hệ số góc $a = -1$. Mặt khác tiếp tuyến với (C) tại điểm bất kì trên (C) có hoành độ x có:

$$a_{tt} = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \geq -1 = a \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Nhận xét:

Dễ thấy ta có kết quả tổng quát như sau (với chứng minh hoàn toàn tương tự): Với đường cong $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ thì tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc bé nhất; (còn khi $a < 0$ thì hệ số góc lại lớn nhất).

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Giải

Đường thẳng $5x - y = 0$ có hệ số góc bằng 5, nên để tiếp tuyến tại M song song với Δ trước hết ta cần có: $y'(-1) = 5 \Leftrightarrow m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 4$.

Khi $m = 4$ thì tiếp tuyến có dạng: $y - (-2) = 5(x + 1) \Leftrightarrow y = 5x + 3$. Rõ ràng đường này song song với Δ , vậy $m = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Thí dụ 4:

Cho $y = x^3 + 1 - m(x + 1)$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại giao điểm của nó với trục tung, tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

Giải

Dễ thấy $M(0; 1 - m)$ là giao điểm của (C_m) với trục tung, nên cũng dễ thấy $y = -mx + 1 - m$ là tiếp tuyến với (C_m) tại M.

Gọi A, B tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành và trục tung, ta có ngay: $A = \left(\frac{1-m}{m}; 0 \right)$ và $B = (0; 1-m)$.

(chú ý khi $m = 0$, thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này).
 Từ đó:

$$S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{1-m}{m} \right| |1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Đó là 4 giá trị cần tìm của tham số m .

Thí dụ 5:

Cho đường cong (C): $y = x^3 - 2x^2 + 8x + 5$. Chứng minh không có bất kì hai tiếp tuyến nào của đường cong lại vuông góc với nhau.

Giải

Giả sử trái lại có hai đường tiếp tuyến của (C) vuông góc với nhau. Gọi x_1, x_2 tương ứng là các hoành độ của hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến ấy. Gọi a_1, a_2 lần lượt là các hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm trên (C) có hoành độ x_1, x_2 . Khi đó từ $a_1 a_2 = -1 \Rightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

$$\Rightarrow (3x_1^2 - 2x_1 + 7)(3x_2^2 - 2x_2 + 7) = -1 \quad (1).$$

Tam thức $f(t) = 3t^2 - 2t + 7$ có $\Delta' < 0$ nên $f(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Từ đó và từ (1) suy ra mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng là sai $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 6:

Cho $y = x^3 - 3x + 1$ (C).

1/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$

2/ Tiếp tuyến ở câu 1/ cắt lại đường cong (C) tại điểm M' . Tìm tọa độ của M' .

Giải

1/ Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$y - 3 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y = 9x - 15.$$

2/ Giả sử tiếp tuyến ở câu 1/ cắt (C) tại M' .

Xét phương trình:

$$x^3 - 3x + 1 = 9x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 \quad (2)$$

Chú ý rằng (2) chắc chắn có nghiệm

$$x = 2, \text{ vì thế } (2) \Leftrightarrow x^3 - 8 - 12x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

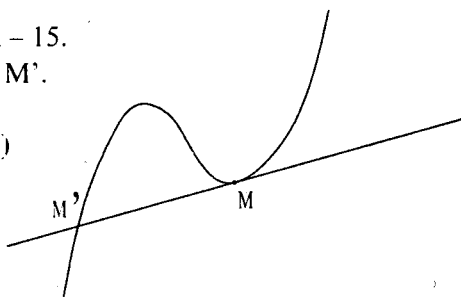
$$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4. \end{cases}$$

Vậy $M'(-4; -51)$ là giao điểm thứ hai của tiếp tuyến tại M với (C).

Thí dụ 7:

Cho đường cong $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C).

Chứng minh rằng trên (C) tồn tại vô số cặp điểm mà hai tiếp tuyến tại từng cặp điểm song song với nhau.



Giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Bài toán đã cho có dạng tương đương sau:
Chứng minh rằng tồn tại vô số k sao cho các phương trình:

$$3x^2 - 6x = k \quad (1)$$

đều có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - k = 0 \quad (2)$$

$$\text{Để thấy } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -3 \quad (3).$$

Từ (3) suy ra đpcm.

Nhận xét:

1/ Kết quả trên vẫn đúng cho mọi đường cong bậc ba tùy ý.

2/ Các bạn hãy tự chứng minh nhận xét sau: Mọi đường thẳng nối từng cặp trên luôn đi qua một điểm cố định $(1; -1)$.

Loại 2: Phương trình tiếp tuyến với đường cong đi qua một điểm cho trước:

Lược đồ chung giải các bài toán này như sau:

– Hoặc là quy về bài toán loại 1 (tức là quy về tìm tiếp điểm của tiếp tuyến với đường cong đã cho).

– Hoặc là sử dụng mệnh đề về điều kiện hai đường tiếp xúc với nhau đã trình bày trong phần mở đầu.

Phương pháp thứ hai là phương pháp hay được sử dụng hơn.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2008)

Cho đường cong $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$

Giải

Đi qua điểm $M(-1; -9)$ thì $x = -1$ chắc chắn không phải là tiếp tuyến với (C) nên mọi tiếp tuyến của (C) đi qua M phải có dạng: $y = k(x + 1) - 9$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 = k(x_0 + 1) - 9 & (1) \\ 12x_0^2 - 12x_0 = k & (2). \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta có:

$$4x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)(4x_0^2 - x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

+ Khi $x_0 = -1$, thì $k = 24$. Lúc này tiếp tuyến là $y = 24x + 15$.

+ Khi $x = \frac{5}{4}$ thì $k = \frac{15}{4}$. Lúc này tiếp tuyến là $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Nhận xét:

Trong thí dụ trên điểm $M(-1; -9) \in (C)$. Vì thế nếu ta cho rằng $M \in (C)$, nên tiếp tuyến có dạng:

$$y - (-9) = y'(-1) \cdot (x + 1) = 24(x + 1) \Rightarrow y = 24x + 15$$

Giải như vậy sẽ thiếu đáp số: $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Từ đó ta có bài học sau: Phải phân biệt xem đầu bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M, hay qua M (điểm M nằm trên (C) hay không nằm trên (C) không đóng vai trò gì ở đây cả).

Thí dụ 2:

Cho đường cong $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(0; \frac{3}{2})$.

Giải

Lập luận như thí dụ 1 tiếp tuyến có dạng: $y = kx + \frac{3}{2}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Khi đó có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0^4 - 3x_0^2 + \frac{3}{2} = kx_0 + \frac{3}{2} \\ 2x_0^3 - 3x_0 = k \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta có: $x_0^2(x_0^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Từ đó suy ra có ba tiếp tuyến: $y = \frac{3}{2}$; $y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$; $y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

Thí dụ 3:

Có bao nhiêu tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2; 5)$ với đường cong (C): $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$.

Giải

Mọi tiếp tuyến với (C) qua M có dạng: $y = k(x + 2) + 5$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2 = k(x_0 + 2) + 5 \\ 3x_0^2 - 18x_0 + 17 = k \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn, ta có: $(x_0 - 1)(2x_0^2 - x_0 + 17) = 0$ (3)

Đối với đường cong bậc ba số tiếp tuyến bằng số tiếp điểm (vì mỗi tiếp tuyến với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, chỉ tiếp xúc với đường cong tại một tiếp điểm duy nhất).

Vì thế số nghiệm của (3) bằng số tiếp tuyến với (C) tại M.

Do phương trình $2x_0^2 - x_0 - 37 = 0$ (ẩn x_0) có hai nghiệm phân biệt khác 1, nên (3) có ba nghiệm phân biệt, vì thế qua điểm M vẽ được ba tiếp tuyến đến (C).

Thí dụ 4:

Cho đường cong $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Tìm các điểm $M \in (C)$ sao cho qua M chỉ có thể vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Giải

Giả sử $M(\alpha; \alpha^3 - 3\alpha + 2)$ là điểm thuộc (C) cần tìm. Tiếp tuyến qua M có dạng: $y = k(x - \alpha) + \alpha^3 - 3\alpha + 2$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 2 = k(x_0 - \alpha) + \alpha^3 - 3\alpha + 2 & (1) \\ 3x_0^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn, ta có:

$$2x_0^3 - 3\alpha x_0^2 + \alpha^3 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)^2 (2x_0 + \alpha) = 0 \quad (3).$$

Từ giả thiết suy ra (3) (ẩn x_0) phải có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = -\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Vậy $M(0;2)$ là điểm duy nhất trên (C) cần tìm.

Nhận xét:

Điểm $M(0; 2)$ chính là điểm uốn của (C).

Ta có kết quả sau (chứng minh hoàn toàn tương tự và xin dành cho bạn đọc).
Kết quả của thí dụ trên hoàn toàn đúng với mọi đường bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

Thí dụ 5:

Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị của (C): $y = x^3 + 3x^2$, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải

Gọi $M(\alpha;0)$ là điểm cần tìm. Tiếp tuyến với (C) qua M có dạng:
 $y = k(x - \alpha)$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, thì ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^3 + 3x_0^2 = k(x_0 - \alpha) & (1) \\ 3x_0^2 + 6x_0 = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta có kết quả:

$$2x_0^3 + 3(1 - \alpha)x_0^2 - 6\alpha x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & (3) \\ f(x_0) = 2x_0^2 + 3(1 - \alpha)x_0 - 6\alpha = 0 & (4) \end{cases}$$

Để (3) và (4) có ba nghiệm phân biệt thì (4) cần có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\text{Điều đó xảy ra khi: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -3 \\ \alpha > -\frac{1}{3} \text{ và } \alpha \neq 0 \end{cases} (*)$$

Tại điểm M_1 có hoành độ 0 thì theo (2) suy ra tiếp tuyến với (C) tại M_1 song song với Ox. Vì mọi đường thẳng song song với Oy không phải là tiếp tuyến của (C), nên để thỏa mãn điều kiện đầu bài thì các tiếp tuyến với (C) tại điểm M_1, M_2 phải vuông góc với nhau. Hoành độ M_1, M_2 tương ứng là các nghiệm t_1, t_2 của phương trình:

$$2t^2 + 3(1 - \alpha)t - 6\alpha = 0 \quad (5)$$

Hệ số góc của tiếp tuyến này theo (2) tương ứng là:

$$k_1 = 3t_1^2 + 6t_1; \quad k_2 = 3t_2^2 + 6t_2.$$

Từ đó $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow (3t_1^2 + 6t_1) \cdot (3t_2^2 + 6t_2) = -1$

$$\Leftrightarrow 9(t_1 t_2)^2 + 18t_1 t_2 (t_1 + 2) + 36t_1 t_2 = -1 \quad (6).$$

Áp dụng định lí Viet ta có $t_1 t_2 = \frac{3(\alpha - 1)}{2}$; $t_1 t_2 = -3\alpha$ nên từ (6) sau khi rút gọn ta có: $-27\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{27}$

Vậy $M(\frac{1}{27}; 0)$ là điểm duy nhất trên C cần tìm.

§2. BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ VỚI HÀM ĐA THỨC

Ngoài việc sử dụng thành thạo các quy tắc 1, quy tắc 2 tìm cực đại và cực tiểu của hàm số (đã trình bày trong sách giáo khoa), ta luôn dùng đến các kết quả sau:

– Đường cong $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

– Đường cong $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0$) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

– Giả sử $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 . Khi đó để tính giá trị cực trị ta còn có thể làm như sau:

Gọi $y = Ax + B$ là phần dư trong phép chia của $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cho đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ của nó. Khi đó:

$$y(x_1) = Ax_1 + B; y(x_2) = Ax_2 + B.$$

Khi sử dụng nhận xét này, phải chứng minh lại như sau:

Ta có: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(Cx + D) + Ax + B$, ở đây $Cx + D$ là thương trong phép chia nói trên. Vì $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ đpcm.

Các dạng toán cơ bản:

Loại 1: Các bài toán về sự tồn tại cực trị :

Lớp bài toán này thường có dạng sau: Tìm tham số để các hàm số có cực trị và cực trị này thỏa mãn những điều kiện nào đó cho trước.

Lược đồ chung để giải các bài toán này sẽ là sử dụng điều kiện tồn tại cực trị với các đa thức bậc ba, bậc bốn, kết hợp với việc sử dụng các kết quả về đa thức bậc hai, định lí Viet, lí thuyết về phương trình và bất phương trình.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

Giải

Trước hết hàm số có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (2)$$

Khi thỏa mãn (2) hàm số có cực trị tại $A(1-m; -2-2m^2)$ và $B(1+m; -2+2m^2)$.

Theo bài ra ta có:

$$OA = OB \Leftrightarrow (1-m)^2 + (-2-2m^2)^2 = (1+m)^2 + (-2+2m^2)^2.$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 = m \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \text{ (do } m \neq 0) \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$ là hai giá trị cần tìm của m .

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)

Cho đường cong $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (C_m). Tìm m để đường cong (C_m) có ba cực trị.

Giải

Đường cong (C_m) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^2 + 2(m - 9)x = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (2) \\ 2mx^2 = 9 - m^2. & (3) \end{cases}$$

Như vậy (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm phân biệt khác 0 tức là khi và chỉ khi $\frac{9 - m^2}{2m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \quad (4)$

Vậy (4) là tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của m .

Thí dụ 3:

Cho hàm số $y = x^3 + 2(m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Giải

Đường cong có cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4(m - 1)x + (m^2 - 4m + 1) = 0. \quad (1)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 - \sqrt{3} \\ m > -2 + \sqrt{3} \end{cases} \quad (2)$$

Khi thỏa mãn (2) đường cong đạt cực trị tại hai điểm phân biệt $x = x_1, x = x_2$ là hai nghiệm của (1). Theo định lý Viet, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{4(1 - m)}{3}; x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m = 0 \\ \frac{m^2 - 4m + 1}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \\ m = 5. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (2) suy ra có hai giá trị cần tìm của m là $m = 1$ và $m = 5$

Nhận xét: Thí dụ trên là một minh họa cho tính cần thiết tìm điều kiện để cho hàm số trước hết phải có cực trị.

Thí dụ 4: Cho $y = \frac{1}{4}x^2 - mx^2 + \frac{3}{2}$.

Tìm m để đường cong chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải

Ta có $y' = x^3 - 2mx = x(x^2 - 2m)$.

Khi $m \leq 0$ thì $x^2 - 2m \geq 0$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x		0	
y'	-	0	+
y			

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Khi $m > 0$, ta có bảng biến thiên sau:

x		$\sqrt{2m}$		0		$-\sqrt{2m}$	
y'	-	0	+	0	-	0	+
y							

Từ đó suy ra loại trường hợp này vì hàm số có cực đại và cực tiểu.

Vậy $m \leq 0$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 5:

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m+1$

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < 2 < x_2$.

Giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + 5m+4 = 0$ (1).

Vậy (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 9 \quad (2).$$

Khi thỏa mãn (2) đường cong đạt cực trị tại x_1, x_2 là hai nghiệm của (1).

Để thỏa mãn điều kiện $x_1 < 2 < x_2$, ta cần có:

$$(x_2 - 2)(2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 4 > 0 \quad (3)$$

Từ định lý Viet với (1), và (3) suy ra: $4(2-m) - (5m+4) - 4 > 0 \Leftrightarrow m < 0$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra $m < 0$ là các giá trị cần tìm của m .

Loại 2: Các bài toán về đường thẳng nối hai cực trị:

Giả sử cho đường cong bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại 2 điểm $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$. Khi đó để viết phương trình đường thẳng đi qua M_1, M_2 có hai cách như sau:

– Sử dụng công thức quen biết của hình học giải tích viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M_1, M_2 .

– Nếu gọi $y = Ax + B$ là phần dư trong phép chia của $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cho $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, thì $y = Ax + B$ chính là đường thẳng cần tìm.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A– 2002)

Cho đường cong $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

Giải

Ta có $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$. Vì thế $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1).

Do $\Delta' = 1 > 0$ với mọi m , nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, tức là đường cong luôn có cực đại và cực tiểu với mọi m .

Để thấy $A = (m - 1; -m^2 + 3m - 2)$ và $B(m + 1; -m^2 + 3m + 2)$ là hai điểm cực trị của (C). Đường thẳng nối A, B có dạng:

$$\frac{y - (-m^2 + 3m - 2)}{-m^2 + 3m + 2 - (-m^2 + 3m - 2)} = \frac{x - (m - 1)}{m + 1 - (m - 1)} \Leftrightarrow y = 2x - m^2 + m.$$

Thí dụ 2:

Cho đường cong bậc ba $y = 5x^3 + 7x^2 - 9x + 1$ (C)

Viết phương trình đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của (C)

Giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 15x^2 + 14x - 9 = 0$ (1)

Do (1) chắc chắn có hai nghiệm phân biệt (do $\frac{c}{a} = -\frac{9}{15} < 0$), nên (C) có cực đại, cực tiểu.

Áp dụng phép chia đa thức $y = 5x^3 + 7x^2 - 9x + 1$ cho $y' = 15x^2 + 14x - 9$ ta có:

$$5x^3 + 7x^2 - 9x + 1 = (15x^2 + 14x - 9) \cdot 8 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x.$$

Vậy $y = -\frac{172}{45}x - \frac{18}{45}$ là đường thẳng cần tìm!

Nhận xét: Trong thí dụ trên, (1) có hai nghiệm: $x = \frac{-7 \pm \sqrt{284}}{15}$.

Việc tìm y_1, y_2 là quá phức tạp, do đó phương pháp sử dụng công thức của hình học giải tích để viết phương trình đường thẳng qua A, B ở đây sẽ quá phức tạp (về mặt tính toán)

Thí dụ 3:

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ (C_m). Tìm m để khoảng cách giữa các điểm cực trị của hàm số là nhỏ nhất.

Giải

Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1$ Vì thế $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

Từ (1) suy ra nó có hai nghiệm phân biệt với mọi m , tức là với mọi m thì (C_m) luôn có cực trị. Thực hiện phép chia y cho y' ta có:

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1 = (x^2 - 2mx - 1) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}m \right) - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1.$$

Vậy $y = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1$ là đường thẳng nối hai cực trị A, B của (C_m),

ở đây:

$$A = \left(x_1; -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1 \right) \quad B = \left(x_2; -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1 \right),$$

trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của (1).

Ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)(x_2 - x_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 \left[\frac{4}{9}(m^2 + 1) + 1 \right] \\ &= \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] \left[\frac{4}{9}(m^2 + 1) + 1 \right] = (4m^2 + 4) \left(\frac{4}{9}m^2 + \frac{13}{9} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

(do $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = -1$ theo định lý Viet)

Từ (2) suy ra $\min AB = \frac{2}{3}\sqrt{13} \Leftrightarrow m = 0$.

§3. BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HÀM ĐA THỨC

Bài toán tương giao của các đường cong với đường thẳng và giữa các đường cong với nhau là một lớp quan trọng trong các bài toán về hàm số. Nội dung của bài toán này có dạng chung như sau: Cho các đường cong (hoặc đường thẳng) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thường chứa tham số. Tìm điều kiện để chúng cắt nhau và các giao điểm của chúng thỏa mãn một điều kiện cho trước nào đấy. Ta biết rằng hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (1).

Vì thế bài toán về sự tương giao của các đường và việc khảo sát phương trình (1) có liên quan mật thiết với nhau. Bài toán này được giải dựa vào bài toán kia.

Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày các dạng toán cơ bản của lớp các bài toán này.

Loại 1: Đoán trước một giao điểm của các đường:

Cho hai đường cong đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ (mà một trong chúng có thể là đường thẳng). Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = g(x) \quad (1).$$

Ta chỉ quan tâm khi (1) là phương trình có bậc lớn hơn hoặc bằng 3.

Nếu như bằng cách nào đó có thể biết trước một nghiệm x_0 của nó, thì (1) có thể hạ bậc bằng cách đem $f(x) - g(x)$ chia cho $x - x_0$.

$$\text{Khi ấy } (1) \Leftrightarrow (x - x_0)h(x) = 0 \quad (2),$$

ở đây bậc của phương trình $h(x) = 0$ giảm đi 1 so với (1).

Ta sẽ trình bày cách xác định x_0 thông qua một số thí dụ sau đây.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008).

Cho đường cong $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C) và điểm $I(1; 2)$. Chứng minh rằng mọi đường thẳng qua I với hệ số góc $k > -3$ đều cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, I sao cho I là trung điểm của AB.

Giải

Đường thẳng d qua I với hệ số góc k có dạng: $y = k(x - 1) + 2$. Số giao điểm của d với (C) là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = k(x - 1) + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2 - k) = 0 \quad (1)$$

$\Delta' = k + 3 > 0$ khi $k > -3$ và $x^2 - 2x - 2 - k$ nhận giá trị $-k + 3 \neq 0$ khi $x = 1$, nên (1) có ba nghiệm phân biệt.

Ba giao điểm của d với (C) là A, I, B trong đó A, B tương ứng có hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 - k = 0$.

Theo định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \Rightarrow I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow d_{pcm}$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2002)

Cho đường cong $y = -x^3 + 3x^2$ (C) và đường thẳng $y = -k^3 + 3k^2$. Tìm k để chúng cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Giải

Xét phương trình: $-x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2$ (1)

$$\Leftrightarrow (x^3 + k^3) + 3(x^2 - k^2) = 0 \Leftrightarrow (x - k)[x^2 + x(k - 3) + k^2 - 3k] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + x(k - 3) + k^2 - 3k = 0 \end{cases} \quad (3).$$

Từ đó suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm phân biệt khác k , tức là khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(k) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 2k - 3 < 0 \\ k^2 - 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0; k \neq 2. \end{cases} \quad (4)$$

(4) là tập hợp giá trị cần tìm của k .

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D - 2009)

Cho đường cong $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ (C_m). Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

Giải

Đường thẳng $y = -1$ và $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình: $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$ (1) có bốn nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi phương trình

$$t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \quad (2)$$

có hai nghiệm dương và bé hơn 4.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \begin{cases} 3m + 1 \neq 1 \\ 0 < 3m + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Đó là các giá trị cần tìm của m .

Thí dụ 5:

Cho đường cong $y = x^3 + 2(m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3.

Giải

Số giao điểm của (C_m) với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

Có thể thấy một nghiệm của (1) là $x_0 = 2$. Từ đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)[x^2 + 2mx - (m^2 + 1)] = 0. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi phương trình $f(x) = x^2 + 2mx - m^2 - 1 = 0$ (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 sao cho $x_1 < x_2 < 3$.

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + m^2 + 1 > 0 \\ (3-x_1)(3-x_2) > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \\ -m^2 + 4m + 3 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Thay $x_1 + x_2 = -2m$; $x_1 x_2 = -m^2 - 1$ vào hệ (4)(5)(6), ta đi đến:

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{17} < m < 3 + \sqrt{17} \\ m \neq 2 \pm \sqrt{7}. \end{cases}$$

Đó là các giá trị cần tìm của m .

Loại 2: Sử dụng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ để biện luận phương trình $f(x) = m$.

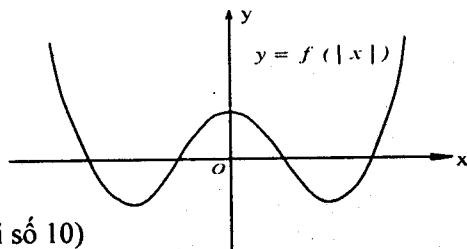
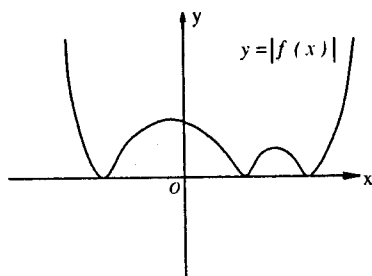
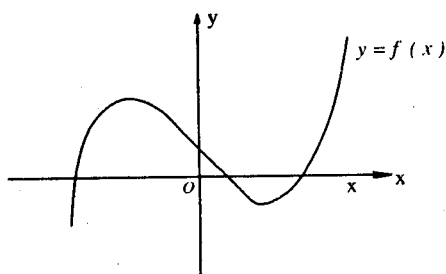
Đây là một trong những phương pháp hay dùng để khảo sát các bài toán về tính giao nhau của các đường, nhất là các bài toán liên quan chặt chẽ đến đồ thị của hàm số $y = f(x)$ (chú ý rằng các bài toán về hàm số ở câu 1 thường là bắt vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$).

Các kiến thức hay dùng trong mục này là hai phép biến đổi đồ thị sau:

– Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

– Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

Xem các hình vẽ sau:



(Xem lại SGK đại số 10)

2/ Ta có: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m(1) \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4 (2)$

Từ đồ thị (xem hình 2) $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ suy ra (2) (tức là (1)) có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Loại 3: Bài toán tìm giao điểm khi tham số m ở dạng bậc nhất:

Giả sử bài toán tìm giao điểm của đường cong quy về tìm nghiệm phương trình:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

trong đó (1) không nhằm được nghiệm và tham số m trong (1) có dạng bậc nhất (tức là trong (1) không chứa $m^2, m^3, \dots$) khi đó dễ dàng quy (1) về dạng:

$$F(x) = m \quad (2),$$

ở đây $F(x)$ là hàm số phân thức. Bằng cách lập bảng biến thiên của $F(x)$, ta dễ dàng hơn trong việc biện luận số nghiệm của (2), và từ đó suy ra các kết luận đối với 1.

Thí dụ 1:

Cho đường cong $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + 3m (C_m)$. Tìm m để (C_m) và đường thẳng d: $y = -3x - 1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$.

Giải

Xét phương trình: $x^3 - 3x^2 - 3mx + 3m = -3x - 1 \quad (1)$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 3m(x - 1) \quad (2)$

Vì $x = 1$ không phải là nghiệm của (2) với mọi m (khi thay $x = 1$ vào vế trái ta thấy nó bằng 2). Do đó: (2) $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{3(x - 1)} = m \quad (3).$

Dễ thấy $f'(x) = \frac{2(x - 2)(x^2 - x + 1)}{3(x - 1)^2}$, nên có bảng biến thiên sau:

x	1	2
$f'(x)$	-	0 +
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$

Từ đó suy ra (3) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2 < 2$ khi và chỉ khi $m > 1$. Đó cũng chính là các giá trị cần tìm của m.

Thí dụ 2:

Tìm m để đường cong $y = x^3$ và $y = mx^2 - m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Giải hoàn toàn như thí dụ trên và có $m < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ là các giá trị cần tìm của tham số m.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Cho đường cong $y = x^4 + 2x^2 + 4x - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong trên, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

Đáp số: $y = 4x - 1$ và $y = 4x - 2$.

Bài 2:

Cho đường cong $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M thì qua gốc toạ độ.

Đáp số: $M(-1; 12)$.

Bài 3:

Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 4$, biết rằng tiếp tuyến tạo với đường thẳng $y = 3x + 7$ góc 45° .

Đáp số: Có 4 tiếp tuyến $y = -2x - \frac{8}{3}$; $y = -2x - 4$;

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{38 + 9\sqrt{6}}{6} \text{ và } y = \frac{1}{2}x - \frac{16 + 4\sqrt{6}}{6}.$$

Bài 4:

Cho đường cong $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; \frac{3}{2})$.

Đáp số: $y = \frac{3}{2}$; $y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$; $y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$.

Bài 5:

Cho đường cong $y = x^3 - 12x + 12$ (C). Tìm trên đường thẳng $y = -4$ các điểm M sao cho qua M vẽ được ba tiếp tuyến với (C).

Đáp số: $M = (\alpha; 0)$ với $\alpha < -4$ hoặc $\alpha > \frac{4}{3}$ (và $\alpha \neq 2$).

Bài 6:

Cho đường cong $y = \frac{4}{3}x^3 - 2(1 - \sin \alpha)x^2 - (1 + \cos 2\alpha)x + 1$ (C). Tìm α để (C) có cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$

Đáp số: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Bài 7:

Cho đường cong $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Tìm m để đường cong đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.

Đáp số: $m = 2$ hoặc $m = \frac{2}{3}$.

Bài 8:

Cho $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + 2m - 5$. Tìm m để đường cong đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2 < 3$.

Đáp số: $m > 1$ hoặc $-\frac{39}{10} < m < -3$.

Bài 9:

Cho đường cong $y = x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x + m(1 - m^2)$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

Đáp số: $m > 2$.

Bài 10:

Cho đường cong $y = x^3 + 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$.

Đáp số: $m = \pm 1$.